પાઠ્યપુસ્તક માળા:—૨

ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો

ભાગ ૨

પ્રકાશક

ચરોતર એજ્યુકેશન સોસાઇટી,
આણંદ

આઠ આના

પાઠ્યપુસ્તક માળાઃ—૨

ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો

લેખક

ભીખાભાઇ કુબેરભાઇ પટેલ
આચાર્ય, દાદાભાઇ નવરોજી વિનય મંદિર, આણંદ

પ્રકાશક

ચરોતર એજ્યુકેશન સોસાઇટી,
આણંદ

૧૯૨૩

પુસ્તક મળવાનું ઠેકાણું

ચરોતર એજ્યુકેશન સોસાઇટી, આણંદ

આણુંદ ચરોતર પ્રિન્ટિંગ પ્રેસમાં ત્રિભુવનદાસ કીસીભાઇ
પટેલે પ્રકાશકને માટે છાપ્યું. તા. ૧૦-૮-૨૩.

નિવેદન.

માધ્યમિક શાળાનો ભૂમિતિનો પૂરો અભ્યાસક્રમ આપવાના હેતુથી ગુજરાતી ભાષામાં લખાયેલું આ પ્રથમ જ પાઠ્યપુસ્તક હોવાથી તેની અગત્ય સંબંધી ખાસ કહેવાનું હોય નહિ.

કોઇ પણ વિષયના શિક્ષણની શરૂઆતમાં વિદ્યાર્થીઓને તે વિષય સરળ અને રસિક લાગે છે તો તે રસ હંમેશ કાયમ રહે છે અને વિદ્યાર્થીઓ હોંસથી તે વિષયમાં પ્રગતિ કરી શકે છે. આ લક્ષમાં રાખીને આ પુસ્તકમાં કેટલાક ફેરફાર કરવામાં આવ્યા છે. પુસ્તકનો ઉપયોગ કરનારને આ ફેરફારો ક્યા હેતુથી કરવામાં આવ્યા છે તે જણાવવામાં આવે તો તેનો ઉપયોગ કરવામાં સરળતા થાય એ હેતુથી તે સબંધી મારા વિચારો ટુંકામાં જણાવું તો અસ્થાને નહિ ગણાય.

૧. વ્યાખ્યાઓ.

વ્યાખ્યાઓ સાથે લગી એક જગાએ નહિ આપતાં છુટક છુટક ઉપયોગમાં આવે તેવી રીતે જ આપેલી છે. પારિભાષિક શબ્દો સંબંધી ચોકકસ ખ્યાલ આપ્યા સિવાય તેમનો ચોકસાઇથી ઉપયોગ થાય તેમ નહિ લાગવાથી શરૂઆતથી જ્યાં જ્યાં તેવા શબ્દોનો ઉપયોગ કરવાની જરૂર પડી છે ત્યાં ત્યાં પહેલાં વ્યાખ્યાઓ જ આપી છે અને તેમનુ જ્ઞાન વિદ્યાર્થીઓને સચોટ થાય તે માટે તે ઉપર કેટલાક દાખલાઓ પણ સાથે સાથે જ આપ્યા છે. વિદ્યાર્થીઓ સાધનોનો ઉપયોગ કરે અને ચોકસાઇથી માપસર આકૃતિઓ દોરતાં શીખે એ જ હેતુ લક્ષમાં રાખેલો છે.

બિંદુ, રેખા અને પૃષ્ઠની વ્યાખ્યાઓ ક્રિયાત્માક ભાગમાં વિદ્યાર્થીઓના ખ્યાલમાં આવે તેવી રીતે આપવામાં આવી છે. આની શાસ્ત્રીય વ્યાખ્યાઓ તાર્કિક ભાગની શરૂઆતમાં જ શિક્ષકે આપવી. " બિંદુને સ્થિતિ છે પણ પરિમાણ નથી " એટલે આપણે દોરીએ છીએ તે બિંદુને પરિમાણ તો છે જ પણ ભૂમિતિમાં જ્યારે આપણે બિંદુનો વિચાર કરીએ છીએ ત્યારે તેના પરિમાણ (લંબાઇ, પહોળાઇ, જાડાઇ) સંબંધી આપણે કાંઈ પણ ખ્યાલ કરતા જ નથી. એટલે ભૂમિતિનું બિંદુ ફક્ત સ્થિતિ બતાવવાના કામમાં જ આવે છે. બિંદુનું પરિમાણ જેટલું ઓછુ તેટલી ચોકસાઇથી આ સ્થિતિ બતાવી શકાય છે માટે આપણે બિંદુ ઓછામાં ઓછા પરિમાણ વાળું દોરીએ છીએ " રેખાને લંબાઇ છે પણ પહોળાઇ અને જાડાઇ નથી " આનો અર્થ રેખાને પહોળાઇ અને જાડાઇ બીલકૂલ છે જ નહિ એમ નથી પણ રેખાનો ઉપયોગ આપણે ભૂમિતિમાં બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર ગણવામાં જ કરીએ છીએ. એટલે ટુંકામાં આપણે રેખાનો વિચાર કરીએ છીએ ત્યારે તેની જાડાઇ અને પહોળાઇનો બીલકૂલ વિચાર કરતા નથી. પણ ફક્ત તેની લંબાઇનો જ વિચાર કરીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે सर રેખા ૫" લાંબી છે તે ઉપરથી આપણે સમજીએ છીએ કે स અને र બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર ૫" છે. આમાં રેખાની પહોળાઇનો આપણે બીલકૂલ ખ્યાલ કરતા નથી માટે રેખા પાતળામાં પાતળી દોરવી હિતાવહ છે. આ જ પ્રમાણે પૃષ્ઠનું પણ સમજવું. પૃષ્ઠનો વિચાર કરતાં આપણે તેની લંબાઇ અને પહોળાઇને લક્ષમાં લઇએ છીએ પણ જાડાઇ લક્ષમાં લેતા નથી એટલે ભૂમિતિના પૃષ્ઠને જાડાઇ નથી એમ કહેવું યથાર્થ જ છે.

૨ કૃત્યો.

સામાન્ય રીતે ભૂમિતિનાં પુસ્તકોમાં પ્રથમ પ્રાયોગિક ભાગ આપવામાં આવે છે અને તેમાં મુખ્યત્વે કરીને સાબીત કરવાના સિદ્ધાન્તોનાં સત્યો શોધી કહાડવા પ્રયત્ન થાય છે. આ પછી તુર્ત જ તાર્કિક ભાગ શરૂ થાય છે. આથી તાર્કિક ભાગના સિધ્ધાન્તો અને દાખલાઓમાં કરવામાં આવતી રચનાઓનું વિદ્યાર્થીઓને જ્ઞાન હોતું નથી અને છતાં તે કરવી તો પડે છે જ એટલે તે સંબંધી વિદ્યાર્થીઓને ચોકકસ માહિતી નહિ હોવાથી સાધનોનો યથાર્થ ઉપયોગ થતો નથી અને કામ ચોકકસ અને રસિક બનતું નથી. વધારામાં તાર્કિક ભાગ શરૂ કરતા પહેલાં ક્રિયાત્મક ભાગ કરવાથી વિદ્યાર્થીઓના હાથ અને આંખ કેળવાય છે અને તેઓ સાધનોનો યથાર્થ ઉપયોગ ઝડપથી કરતાં શીખે છે. આથી કેટલીક પ્રાથમિક વ્યાખ્યાઓ અને તે ઉપર મનોયત્નો આપ્યા પછી તુર્ત જ કેટલાંક સહેલાં અને ઉપયોગી કૃત્યો આપવામાં આવ્યાં છે. બધાં કૃત્યોની સાબીતી તો પ્રથમ ભાગના પહેલા ૧૩ સિદ્ધાન્તો થઇ ગયા પછી જ વિદ્યાર્થીઓ સારી રીતે સમજી શકે માટે સાબીતી તો ત્યાર પછી જ શીખવવાનો ઉદ્દેશ રાખ્યો છે.

બાકીનાં જે કૃત્યો છુટક છુટક જે સિધ્ધાન્તોની મદદથી સાબીત થાય છે તેમની પાછળ જ આપવામાં આવ્યાં છે.

દરેક કૃત્યનો મ્હાવરો વિદ્યાર્થીઓને થાય અને તેમના હાથ, આંખ અને બુધ્ધિ પણ કેળવાય તે હેતુથી દરેક કૃત્ય ઉપર મનોયત્ન આપવામાં આવ્યું છે અને તેમાં દાખલાઓ પણ રસ પડે તેવા આપવા પ્રયત્ન કર્યો છે.

૩ તાર્કિક ભાગ.

પ્રથમ સિધ્ધાન્ત લંબની રચના કરી સાબીત કરવાથી શરૂઆતમાં વિદ્યાર્થીઓને મુશ્કેલ પડે છે તેથી સરલકોણ (Straight angle) ની વ્યાખ્યા આપી, " ભાગોનો સરવાળો આખાની બરાબર છે " એ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણની મદદ લઇને સરળ સાબીતી આપી છે. બીજા સિધ્ધાન્તની અનિષ્ટાપત્તિ (Reductio-ad-absurdm) થી આપેલી સાબીતી શરૂઆતમાં ભાગ્યે જ કોઇ વિદ્યાર્થી સમજી શકે છે. આથી આ સિધ્ધાન્ત પણ સરળ કોણની મદદથી જ સાબીત કર્યો છે.

સમાન્તર રેખાઓ ઉપરનો સિધ્ધાન્ત પણ વિદ્યાર્થીઓને બહુ ગભરાવે છે. આ સિધ્ધાન્ત જરા મોડો લીધો છે અને સાબીતી વિદ્યાર્થીઓ સમજી શકે તેવી આપવા પ્રયત્ન કર્યો છે. આને આથી પણ મોડા લઇ શકાય; પણ તેના સત્યોથી દાખલા કરવામાં પડતી અનુકૂળતા લક્ષમાં લઇને તેની સાબીતી વિદ્યાર્થીઓ કેટલાક સિધ્ધાન્તો અને તે ઉપરના દાખલા ! કર્યા પછી સહેલાઇથી સમજી શકશે એમ ધારીને જ તે ત્યાં લેવામાં આવ્યો છે.

બહુકોણના અંદરના અને બહારના કોણો સંબંધી સિધ્ધાન્ત ૯ મો લીધો છે તેને સમાન્તર ચતુષ્કોણના સિધ્ધાન્ત પછી પણ લઇ શકાય. તે ૮ મા સિધ્ધાન્તના ઉપસિધ્ધાન્ત તરીકે કે ઉપયોગી દાખલા તરીકે પણ લઇ શકાય. તેની પ્રતિજ્ઞામાં " બહિર્વૃત્ત" (Convex) " શબ્દને " બહુકોણ " પહેલાં પડતો મૂકયો છે; કારણ કે તેનું સત્ય આન્તર્વૃત્ત (Convex) બહુકોણને પણ લાગુ પડે છે. શિક્ષક તે તરફ વિદ્યાર્થીઓનું ધ્યાન ખેંચશે તો તેમાં તેમને રસ પડશે. સિધ્ધાન્ત સાબીત કરવા માટે તો સરળ આકૃતિ દોરવી એ જ સારૂં છે અને તેથી સરળ આકૃતિ જ દોરી છે.

નિધાન (Locus) ના સિધ્ધાન્તો વિદ્યાર્થીઓને સમજવામાં અને શિક્ષકોને સમજાવવામાં ઘણી જ મુશ્કેલી પડે છે અને વિદ્યાર્થીઓને તે ઘણા અગત્યના સિધ્ધાન્તોનું યથાર્થ જ્ઞાન થતું નથી. ઘણા તો તેની વ્યાખ્યા પણ આપી શકતા નથી તો તેના ઉપયોગની તો વાત જ શી ? આ બાબત લક્ષમાં રાખી પુસ્તકની શરૂઆતથી જ એવા કેટલાક છુટા છવાયા દાખલાઓ આપવા પ્રયત્ન કર્યો છે કે જેથી વિદ્યાર્થીઓ નિધાનના સિધ્ધાન્તો શીખે ત્યાર પહેલાં તો તેમનામાં તેમનું સત્ય ઠસેલું હોય અને તેઓ તેનો ઉપયોગ પણ કરતા હોય. વધારામાં નિધાનની રીતસર વ્યાખ્યા આપ્યા પહેલાં કેટલાક દાખલા આપ્યા છે અને સાબીતી પણ તેઓ સમજી શકે તેવી સ્પષ્ટ રીતે આપવા પ્રયત્ન કર્યો છે.

ક્ષેત્રફળના સિધ્ધાન્તોમાં પાઇથેગોરસના સિધ્ધાન્ત સંબંધી ટુંકો ઇતિહાસ આપી ભારતવર્ષમાં તે સત્ય ઘણા પ્રાચીન કાળથી જાણીતું હતું અને ઉપયોગમાં લેવાતું તે સંબંધી ટુંકી હકીકત આપી છે. ભાસ્કરાચાર્યે આ સિધ્ધાન્તની બે રીતે તેમના બીજ ગણિતમાં સાબીતી આપી છે તે પણ આપવામાં આવી છે.

કેટલાક સિદ્ધાન્તોનો ઉપસિદ્ધાન્તો અને વ્યત્યાસ સિદ્ધાન્તોમાં સમાવેશ કરી સાબીત કરેલા સિદ્ધાન્તોની સંખ્યામાં ઘટાડો કરવા પ્રયત્ન કર્યો છે. સઘળા સિદ્ધાન્તોની સાબીતી પુસ્તકમાં આપેલી હોય છે તો વિદ્યાર્થીઓ તે વર્ગમાં સમજવા પ્રયત્ન કરતા નથી અને સાબીતી ગોખે છે. ભુમિતિ તો માધ્યમિક શાળાનું તર્કશાસ્ત્ર છે અને તેથી તે શીખવા અને શીખવવામાં કેટલોક ફરજીઆત વિચાર કરવાની જરૂર પડે એ આવશ્યક છે.

૪ દાખલાઓ.

ઘણા જ દાખલાઓથી વિદ્યાર્થીઓ અને શિક્ષકો ઉભયને કંટાળો આવે છે. આ પુસ્તકમાં દાખલાઓ બહુ નહિ પણ પૂરતા, સહેલા, વ્યાવહારિક, રસિક અને જેમનાં પરિણામ ભવિષ્યના કામમાં ઉપયોગી થાય તેવા આપવા પ્રયત્ન કર્યો છે.

૫ પરિભાષા.

ભૂમિતિની પરિભાષા સામાન્ય ભાષાથી કાંઇક જુદી હોય તો ઘણી અનુકૂળતા થાય છે એવો અનુભવ આ પુસ્તક તૈયાર કરતાં થયો છે. સંસ્કૃત પરિભાષાથી આખા હિંદુસ્તાનમાં પારિભાષિક એકતા આવે, એક ભાષાનું પુસ્તક બીજી ભાષામાં પણ સમજી શકાય, તેના તે જ પારિભાષિક શબ્દોમાં તે બીજી ભાષામાં શીખી અને શીખવી શકાય અને તેના તે જ પારિભાષિક શબ્દો રાખી તેનું ભાષાન્તર પણ બીજી ભાષામાં થઇ શકે એ લક્ષમાં રાખીને જ પરિભાષા મુખ્યત્વે સંસ્કૃત રાખી છે. સહેલા અને ટુંકા શબ્દો પસંદ કરવામાં આવ્યા છે.

આ પુસ્તક બને તેટલું ઉપયોગી બનાવવા ટુંક સમયમાં યથાશક્તિ કાંઇક થયું છે. અનુભવી શિક્ષકો તેમાં સુધારા વધારા સૂચવશે તો બીજી આવૃત્તિ વખતે તેમાં યોગ્ય ફેરફાર કરવામાં આવશે.

ચરોતર એજ્યુકેશન સોસાઇટી,
આણંદ. } ભીખાભાઇ કુબેરભાઇ પટેલ.

શિક્ષકોને સૂચનાઓ.

૧. ભૂમિતિમાં જરૂરનાં સઘળાં સાધનોની પેટી લીધા સિવાય આવનાર વિદ્યાર્થીને વર્ગમાં દાખલ જ નહિ થવા દેવાનો રીવાજ રાખવો.

૨. વ્યાખ્યાઓ ગોખાવવાથી ભૂમિતિશિક્ષણનો હેતુ સફળ થતો નથી. યોગ્યાયોગ્યતાની ચર્ચા કરી વ્યાખ્યાઓ વિદ્યાર્થીઓ વર્ગમાં તૈયાર કરે એ ઇચ્છવા લાયક છે. આ થયા પછી જુદા જુદા પ્રકારની આકૃતિઓ દોરી તે સંબંધી કેટલાક પ્રશ્નો પૂછી વ્યાખ્યાઓ બધા વિદ્યાર્થીઓના મનમાં બરાબર ઠસાવવા પ્રયત્ન કરવાથી કામ રસિક અને સંગીન બનશે.

૩. કોઇ પણ સિદ્ધાન્ત સાબીત કરતા પહેલાં જે સત્ય સાબીત કરવાનું હોય તે વિદ્યાર્થીઓ પાસે જુદા જુદા પ્રકારની આકૃતિઓ દોરાવી પ્રયોગથી શોધી કહાડવું.

૪. આ ઉપરથી વિદ્યાર્થીઓ પાસે જ સિદ્ધાન્તોની પ્રતિજ્ઞા તૈયાર કરાવવી.

૫. પ્રતિજ્ઞામાં આપેલું શું છે અને સાબીત કરવાનું શું છે તે વિદ્યાર્થીઓના મનમાં બરાબર ઠસાવવાથી સિદ્ધાન્ત સાબીત કરવાનું કામ સરળ બને છે.

૬. પાટીઆ ઉપર આકૃતિ દોરાવી વા દોરી સૂચક પ્રશ્નો પૂછી સિદ્ધાન્ત બને તેટલો વિદ્યાર્થીઓ પાસે જ સાબીત કરાવરાવવા પ્રયત્ન કરવા.

૭. સિદ્ધાન્ત શીખવ્યા પછી તે ઉપરના મનોયત્નના ઘણાખરા દાખલા વિદ્યાર્થીઓ કરે ત્યાર પછી જ નવો સિદ્ધાન્ત શીખવવો.

૮. વિદ્યાર્થીઓ કાંઇ પણ પ્રયત્ન જાતે કરે નહિ તે પહેલાં તેમને કાંઇ શીખવવું નહિ.

૯. વિદ્યાર્થીઓને દાખલા ઘેરથી કરી લાવવાને આપવા. તેઓ કરી શકે નહિ એવા દાખલાની પણ આકૃતિ તો દોરી લાવે જ અને તે ઉપર વિચાર પણ બને તેટલો કરી લાવે એવો આગ્રહ રાખવો.

૧૦. બને તેટલું કામ વિદ્યાર્થીઓ પાસેથી જ લેવું. જે શિક્ષક વર્ગમાં પેસે ત્યારથી બોલબોલ જ વા પાટીઆ ઉપર લખલખ જ કરે અને તે જે કરે તેમાં વિદ્યાર્થીઓને ભાગ લેવા ન દે તેથી શિક્ષણનો હેતુ બરાબર સધાતો નથી. **શિક્ષણનો હેતુ વિદ્યાર્થીઓની શક્તિઓ કેળવવાનો છે. થોડી મહેનતે ટુંક વખતમાં વિદ્યાર્થીઓનાં મગજો હકીકતોથી ભરવાનો નથી.**

૧૧. પ્રયત્ન કર્યા પછી ન આવડે તેવા દાખલા ઘણા થોડા વિદ્યાર્થીઓને આવડતા હોય તો પાટીઆ ઉપર બીજાઓને તે સમજાવવા એકાદ વિદ્યાર્થીને કહેવું. તેઓ " હાજી હા " ન કરે તે માટે શીખવાયેલું તેઓ બરાબર સમજ્યા છે કે નહિ તે જાણવાને વારંવાર પ્રશ્નો પૂછવા.

૧૨. ઘણાને આવડતા હોય તેવા દાખલા તેઓ માંહે માંહે ન આવડનારને શીખવે તેમ કરવું. કોઇ કોઇ વખત કાચા વિદ્યાર્થી પાસે પણ પાટીઆ ઉપર આકૃતિ દોરાવી સૂચક પ્રશ્નો પૂછી દાખલાઓ કરાવવા પ્રયત્ન કરવા. આથી વિદ્યાર્થીઓની આત્મશ્રદ્ધા કેળવાશે અને કાચા વિદ્યાર્થીઓને પણ લાગશે કે બાબત તો સહેલી હોય છે પણ તેઓ તે કરવા પ્રયત્ન કરતા નથી માટે તેઓ તે કરી શકતા નથી. આમ કેટલીક વખત થવાથી જેને આ વિષયમાં ઓછો રસ પડતો હશે તેને પણ આ વિષય રસિક લાગશે.

૧૩. ઉપર કહેવાઇ ગયું તેમ શિક્ષક પોતે પાટીઆનું સેવન હદ ઉપરાંત ન કરે તે સાથે તે ખુરશીનું સેવન પણ બહુ ન કરે અને વિદ્યાર્થીઓ કામ કરતા હોય ત્યારે તે કેવી રીતે કરે છે તે ફરતા ફરતા જુવે અને તેમને માર્ગદર્શક થાય એ ઇચ્છવા લાયક છે.

વિદ્યાર્થીઓને સૂચનાઓ.

૧. સઘળી આકૃતિઓ સ્વચ્છ અને માપસર દોરવી.

૨. એક જ રેખા ઉપર બે વખત પેન્સિલ ફેરવવી નહિ.

૩. બિંદુઓમાં થઇને રેખા દોરવા માટે પેન્સિલનું અણિયું બિંદુ ઉપર બરાબર આવે તેવી સ્થિતિમાં કાટખુણિયું બરાબર મૂકયું છે કે નહિ તે તપાસ્યા પછી રેખા દોરવી.

૪. આકૃતિઓ ઘણી નાની દોરવી નહિ.

૫. દરેક વિદ્યાર્થીએ ભૂમિતિ માટે અર્ધા કાગળના કદની એક સારી નોટ બાંધવી. પાનની પહોળાઇના $\frac{1}{8}$ ભાગનો હાંસીઓ રાખી તેમાં દરરોજના કામની શરૂઆતમાં મિતિ લખવી. વિદ્યાર્થીઓ ઉપરના ધોરણોમાં જાય ત્યારે જરૂર પડતા વધારાના કાગળો ઉમેરી આ નોટનો જ ઉપયોગ કરે એ હિતાવહ છે.

૬. આકૃતિઓ દોરવામાં ગમે તે પ્રકારની આકૃતિ દોરવાની હોય ત્યારે ખાસ ધર્મવાળી આકૃતિ દોરવી નહિ. કોઇ પણ ત્રિકોણ દોરવાનો હોય ત્યારે સમભુજ, સમદ્વિભુજ, કે કાટખુણ ત્રિકોણ દોરવો નહિ. કોઇ પણ ચતુષ્કોણ દોરવાનો હોય ત્યારે સમાન્તર ચતુષ્કોણ, લંબચોરસ કે ચોરસ દોરવો નહિ.

૭. આકૃતિઓનાં નામ આપવામાં નિયમ સાચવવાથી ઘણી અનુકુળતા થાય છે. ઘડિઆળના કાંટાની ગતિ વિરૂધ્ધ દિશામાં આકૃતિઓનાં નામ આપવાની ટેવ રાખવી.

ત્રિકોણના स, र, ग કોણોની સામેની ભુજાઓને નામ આપવામાં જ અનુક્રમે સ, ર, ગ, અક્ષરોનો ઉપયોગ કરવો; ગમે તેમ ઉપયોગ કરવો નહિ.

એકરૂપ ત્રિકોણોને નામ આપવામાં અનુક્રમે જે ભાગો સરખા હોય તે ક્રમ પ્રમાણે નામ આપવાં.

૮. કોઇ પણ કાર્ય કરવાને ખાસ કારણ ન હોય તો તે કરવું નહિ અને જે જે કાંઇ કરવામાં આવે તે માટે પ્રમાણ આપવાની ટેવ રાખવી.

૯. અઠવાડિયામાં ઓછામાં ઓછા એક વખત તો શીખેલા બધા સિદ્ધાન્તો અને ઉપસિદ્ધાન્તોની પ્રતિજ્ઞાઓ યાદ કરી જવાથી પ્રમાણ આપવામાં ઘણી સરળતા થાય છે.

૧૦. સાબીતી આપતાં થઇ ગયેલા સિદ્ધાન્તોનું પ્રમાણ આપવામાં સિદ્ધાન્તોના નંબર આપવાની જરૂર નથી. આ માટે આ પુસ્તકમાં સિદ્ધાન્તો સાબીત કરવામાં થોડામાં થોડા શબ્દોમાં પ્રમાણ આપ્યાં છે તે પ્રમાણે પ્રમાણ આપવાં.

૧૧. સિદ્ધાન્તોના જેટલી જ અગત્ય મનોયત્નોની છે. દાખલાઓ કરવામાં પહેલાં જાતે જ પ્રયત્ન કરવો અને ઘણા પ્રયત્ન પછી જ બીજા કોઇની મદદની જરૂર જણાય તો તે લેવી. યાદ રાખવું કે **વધારે પ્રયત્ને મેળવેલું જ્ઞાન વધારે વખત ટકે છે. સ્વપ્રયત્નથી ઘણીજ ધીમી પ્રગતિ કરનાર પણ થોડા વખતમાં અજાયબ ફત્તેહ મેળવે છે.**

૧૨. માપસર આકૃતિઓ દોર્યા પછી આપેલી સમાન બાબતો સમાન નિશાનીઓથી બતાવવી. આથી સાબીતી આપવામાં ઘણી અનુકૂળતા થાય છે.

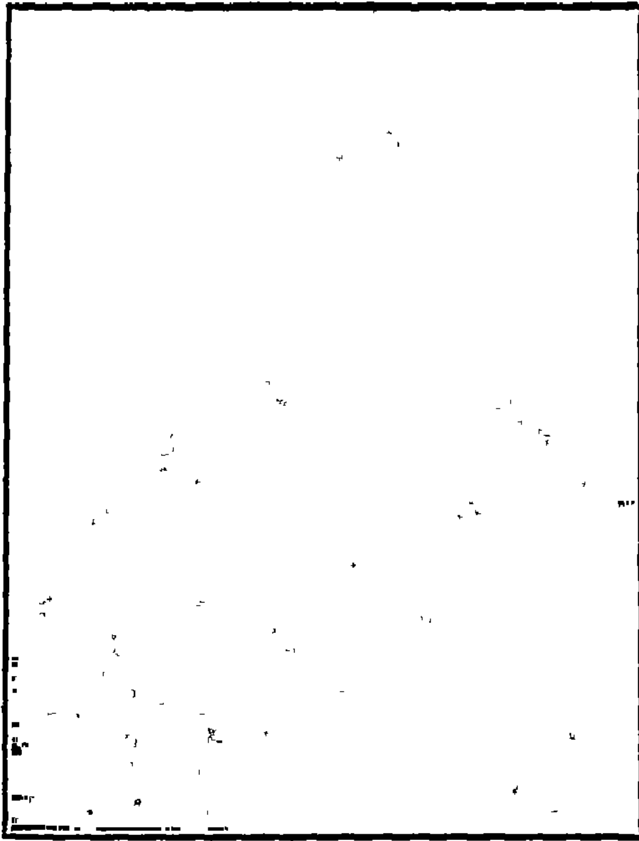
પરિભાષા

અચલ, સ્થિર Constant, fixed
અનન્ત Infinite
અનિષ્ટાપત્તિ Reductio-ad-absurdum
અભિકોણ Vertically opposite angle
અવકાશ Space
અષ્ટકોણ Octagon
અક્ષર Letter
આકૃતિ Figure
ઇ. કૃ. इति कृतम् Q. E. F.
ઇ. સિ. इति सिद्धम् Q. E. D.
ઉંચાઇ Height
ઉપકોણ Adjacent angle
ઉપસિદ્ધાન્ત Corollary
એકકેન્દ્ર Concentric
એકકેન્દ્રવૃત્ત Concentric circle
એકાકાર થવું Coincide
એકાન્તર Alternate
એકાન્તર વૃત્તખંડ Alternate Segment of a Circle
એકમ Unit
એકાત્મક Identical
એક બિંદુગામી, સહગામી Concurrent
એક રૂપ Congruent
એક રૂપતા Congruency
અંતઃકેન્દ્ર Incentre
અંતઃકોણ Interior angle
અંતર્ગત Inscribed
અંતર્ગત કોણ Included angle
અંતર્વૃત્ત Inscribed circle
અંતરિત Subtended
અંશ Degree
આંતરવું Subtend
કર્ણ Hypotenuse
કળા (અંશનો $\frac{1}{60}$ મો ભાગ) Minute
કાટખુણો (મૂલકોણ) Right angle
કાટખુણ ત્રિકોણ Right angled triangle
કાટખુણિયું Set square
કૃત્ય Problem
કેન્દ્ર Centre

કેન્દ્ર રેખા Line of centres
કોટિકોણ Complementary angle
કોણમાપક Protractor
ખંડ Segment
ગુરુકોણ Obtuse angle
ગુરૂકોણ ત્રિકોણ Obtuse angled triangle
ગુરુત્વકેન્દ્ર Centroid
ચતુષ્કોણ Quadrilateral
ચાપ Arc
છેડો Extremity
છેદક Secant
જ્યા Chord
તિર્યક્રેખા Transversal
ત્રિકોણ Triangle
ત્રિજ્યા Redius
દશભુજ Decagon
દ્વિભાજક Bisector
ધર્મ Property
નવકોણ Nonagon
નિધાન Locus
પટ્ટી Ruler
પરિકર Compasses
પરિકેન્દ્ર Circumcentre
પરિગત Described about
પરિગત વર્તુલ, પરિવૃત્ત } Circumscribed circle
પરિધ Circumference
પરિમાણ Dimension
પરિમિતિ Perimeter
પરિવૃત્ત Circumscribed
પક્ષ Data, hypothesis
પાદ Foot of a perpendicular
પાદિક Pedal
પાયો Base
પૂરક Supplementary
પૂરકકોણ Supplementary angle
પંચકોણ Pentagon
પ્રત્યક્ષ સાબીતી Direct proof
પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ Axiom
પ્રતિજ્ઞા Enunciation
પ્રક્ષેપ Projection
પૃષ્ઠ Surface
બહુકોણ Polygon
બહિર્ગત વર્તુલ Escribed circle
બાહ્ય Exterior, External
બાહ્ય કેન્દ્ર Excentre
બાહ્યકોણ Exterior angle

બિંદુ Point
ભુજ Arm, side
ભૂમિતિ Geometry
મધ્ય Middle
મધ્યગા Median
માપ Scale
રચના Construction
રેખા Line
લઘુકોણ ત્રિકોણ Acute angled Triangle
લંબ Perpendicular, Altitude
લંબચોરસ Rectangle
વક્રરેખા Curved line
વર્ગ Square
વર્તુલ (વૃત્ત) Circle
વાર્તિક (ચક્રીય) Cyclic
વિકર્ણ Diagonal
વિકળા (અંશનો $\frac{૧}{૩૬૦૦}$ મો ભાગ) Second
વિભાજક Dividers
વિષમભુજ ત્રિકોણ Scalene triangle
વૃત્તખંડ Segment of a Circle
વ્યત્યાસ Converse theorem
વ્યાખ્યા Definition
વ્યાસ Diameter
વ્યુત્ક્રમકોણ Alternate angle
શિરોબિંદુ Vertex
શિરોબિંદુકોણ Vertical angle
ષટ્કોણ Hexagon
સજાતિય Similar
સપ્તકોણ Heptagon
સમ Regular
સમકોણ ત્રિકોણ Equiangular triangle
સમચતુર્ભુજ Rhombus
સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ Isosceles triangle
સમ બહુકોણ Regular polygon
સમભુજ ત્રિકોણ Equilateral triangle
સમલંબ ચતુષ્કોણ Trapezium
સમાન Equal
સમાન્તર Parallel
સમાન્તર (ભુજ) ચતુષ્કોણ Parallelogram
સંકેત Postulate
સંગત કોણ Corresponding angle

સાધ્ય To be proved
સાબીતી Proof
સામાન્ય Common
સામ્ય સમીકરણ Identity
સિદ્ધાન્ત Theorem
સુરેખ Rectilineal
સુરેખા Straight line
સ્થિતિ Position
સ્થિર Fixed
સ્પર્શ રેખા Tangent
સ્પર્શબિંદુ Point of contact
ક્ષેત્ર Plane surface or plane
ક્ષેત્ર ભૂમિતિ Plane geometry
ક્ષેત્રફળ Area



યુકિલડ

મહાન ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી

ઇ. સ. પૂ. ૩૦૦

ચરોતર પ્રિન્ટિંગ પ્રેસ-આણંદ.

તાર્કિક ભૂમિતિ ભાગ ૨

પુસ્તક ૧

પ્રકરણ ૧

પ્રત્યક્ષપ્રમાણો, સ્વીકૃત્યો, વગેરે.

પદાર્થોનાં કદ, આકાર અને સ્થિતિ સંબંધી ચર્ચા કરનાર શાસ્ત્રને **ભૂમિતિ**× કહે છે.

એક જ ક્ષેત્રમાં આવેલાં બિંદુઓ, રેખાઓ અને આકૃતિઓના ધર્મો સંબંધી ચર્ચા કરનાર શાસ્ત્રને **ક્ષેત્રભૂમિતિ** કહે છે.

પ્રથમ ભાગમાં આપણે ભૂમિતિનાં સાધનોનો ઉપયોગ કરીને કેટલાંક સત્યો સંબંધી અનુમાન કર્યાં. હવે આપણે સાધનોની મદદ સિવાય તર્કથી ભૂમિતિનાં સત્યો સમાન ધર્મની સર્વ આકૃતિઓમાં સત્ય હોવાં જ જોઇએ એ સાબીત કરીશું. આપણે હરેક વખત ભૂમિતિનાં સાધનો આપણી સાથે રાખતા નથી, કેટલીક બાબતોમાં તો સાધનો અને તે વાપરનાર માણસ ચોક્કસ હોય નહિ તો પરિણામ ઉપર વિશ્વાસ પણ રાખી શકાય નહિ. આવી જગાએ આપણને તર્કથી અમુક સત્યનો ઉપયોગ કરવાની જરૂર પડે છે. કોઇ કોઇ વખત આપણને વા બીજા કોઇને કોઇ સત્ય સંબંધી શંકા થાય તો તર્કથી શંકાનું સમાધાન થઇ શકે છે. આ રીતે ક્રિયાત્મક ભૂમિતિ કરતાં પણ તાર્કિક ભૂમિતિ વધારે ઉપયોગી છે.

× ભૂ=પૃથ્વી, મિતિ=માપણી. પૃથ્વી ઉપરનાં અંતરો અને નાના પ્રકારની આકૃતિઓ માપવાની વિદ્યા. આને રેખાગણિત પણ કહે છે.

તાર્કિક ભૂમિતિમાં બાબતો સરખી દેખાતી હોય વા માપવાથી સરખી થતી હોય તે ઉપરથી બીજા કોઇ ભૂમિતિના પ્રમાણ સિવાય તે સમાન છે એમ આપણે કહી શકીએ નહિ. પ્રમાણ સિવાયનું કોઇ પણ સત્ય તર્કમાં સ્વીકારી શકાય નહિ. પ્રમાણો આપવામાં આપણે વ્યાખ્યાઓ, પ્રત્યક્ષપ્રમાણો, અને સાબીત કરેલાં સત્યોનો ઉપયોગ કરીશું.

પ્રત્યક્ષપ્રમાણો.

કોઇ પણ શાસ્ત્રની ચર્ચામાં કેટલાંક સર્વમાન્ય સહેલાં સત્યો સ્વીકાર્યા સિવાય આપણે ચર્ચા કરી નિર્ણય કરી શકતા નથી. ભૂમિતિમાં પણ આવાં કેટલાંક સત્યો સ્વીકારવાની જરૂર છે. આથી દરેક વિચારશીલ પુરૂષ ચર્ચા સિવાય સ્વીકારે તેવાં કેટલાંક સરળ સત્યોને પ્રત્યક્ષપ્રમાણ તરીકે સ્વીકારવામાં આવે છે. વ્યાવહારિક જીવનમાં તેમને માટે સાબીતીની જરૂર નથી. આ સત્યો નીચે પ્રમાણે છે.

૧ જે વસ્તુઓ બીજી કોઇ એક વસ્તુ સમાન હોય, તે સમાન છે.

૨ સમાનમાં સમાન વસ્તુઓ ઉમેરીએ, તો સરવાળા સમાન થાય.

૩. સમાનમાંથી સમાન બાદ કરીએ, તો બાદબાકી સમાન થાય.

૪. સમાનને સમાને ગુણીએ, તો ગુણાકાર સમાન થાય.

૫. સમાનને સમાને ભાગીએ, તો ભગાકાર સમાન થાય.

૬. આખું તેના ભાગથી વધારે છે,

૭. અસમાન વસ્તુઓમાં સમાન વસ્તુઓ ઉમેરવામાં આવે વા તેમાંથી બાદ કરવામાં આવે, તો પરિણામે નાની વસ્તુ નાની અને મોટી વસ્તુ મોટી રહે છે.

૮.[1] કોઇ પણ રેખા, કોણ વા આકૃતિ તેની જગાએથી લઇને તેના કદ અને આકારમા ફેર કર્યા સિવાય, બીજી રેખા, કોણ વા આકૃતિ ઉપર મૂકવાથી તે સાથે એકાકાર થઇ જાય, તો તે બન્ને પ્રમાન છે.

૯. બે સુરેખાઓ અવકાશ ઘેરી શકતી નથી.

૧૦. સઘળા સરલકોણો અને કાટખુણાઓ સમાન છે.

૧૧. આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી સુરેખાને સમાન્તર ફક્ત એક જ સુરેખા દોરી શકાય. (પ્લેફેરનુ પ્રત્યક્ષપ્રમાણ.)

સ્વીકૃત્યો.

સિદ્ધાન્તો સાબીત કરવામાં જરૂરની રચનાઓ કરવાની છુટ છે. આ માટે જે રચનાઓ કરવાનો સ્વીકાર થયેલો છે તેમને **સ્વીકૃત્યો** કહે છે. તે નીચે પ્રમાણે છે.

૧. બે બિંદુઓમાં થઇને એક સુરેખા દોરી શકાય

૨. સુરેખા બન્ને બાજુ ગમે તેટલી લંબાવી શકાય.

૩. કોઇ એક બિંદુને કેન્દ્ર લઇ કોઇ પણ ત્રિજ્યાથી વર્તુલ દોરી શકાય.

૪. આપેલી મોટી સુરેખામાંથી નાની સુરેખા જેટલો ગમે તે કોઇ ભાગ કાપી શકાય.

૫. આપેલી સુરેખાને કોઇ પણ બિંદુ આગળ લંબ દોરી શકાય.

૬. સુરેખાઓ બિંદુઓથી અને કોણો સુરેખાઓથી દુભાગી શકાય.

૭. આપેલી સુરેખાના કોઇ એક બિંદુ આગળ આપેલા કોણ બરાબર કોણ બનાવવાને સુરેખા દોરી શકાય.

સિદ્ધાન્તો. ×

ભૂમિતિનાં સત્યોની ચર્ચાના સિધ્ધાન્તોના **પ્રમેય સિદ્ધાન્તો** અને **કૃત્ય સિદ્ધાન્તો** એવા બે ભાગ પાડવામાં આવ્યા છે.

પ્રમેય સિદ્ધાન્તોમાં મુખ્યત્વે સત્યો સાબીત કરવાનાં હોય છે અને રચના કરવાની હોય છે તો તે સાબીતી પૂરતી જ હોય છે.

કૃત્ય સિદ્ધાન્તોમાં રચના મુખ્ય અને સાબીતી ગૌણ હોય છે.

દરેક સિદ્ધાન્તના પાંચ ભાગમાં નીચે જણાવેલી બાબતોનો સમાવેશ થાય છે.

૧. **પ્રતિજ્ઞામાં** સિદ્ધાન્તનું સત્ય સામાન્ય શબ્દોમાં દર્શાવાય છે.

૨. **પક્ષમાં** આપેલી બાબતો અમુક આકૃતિને લગતા શબ્દોમાં દર્શાવાય છે.

૩. **સાધ્યમાં** સાબીત કરવાની બાબતો આકૃતિને લગતા શબ્દોમાં દર્શાવવામાં આવે છે.

૪. **રચનામાં** સત્ય સાબીત કરવા માટે જરૂરની રચના કરવામાં આવે છે.

૫. **સાબીતીમાં** સિદ્ધાન્તનુ સત્ય પ્રમાણો આપી સાબીત કરવામાં આવે છે.

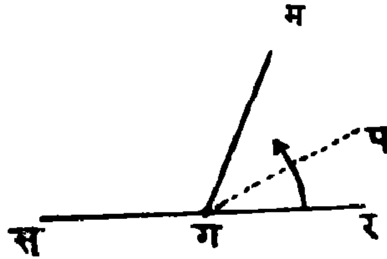
× " પ્રમેય સિદ્ધાન્ત " માટે " સિદ્ધાન્ત " અને " કૃત્ય સિદ્ધાન્ત " માટે " કૃત્ય " શબ્દો રૂઢ થઇ ગયેલા હોવાથી આ પુસ્તકમાં તેમને માટે " સિદ્ધાન્ત " અને " કૃત્ય " શબ્દોનો જ ઉપયોગ કર્યો છે.

પ્રકરણ ૨

બિંદુ આગળના કોણો

સિદ્ધાન્ત ૧

એક સુરેખા ઉપર બીજી સુરેખા પડે તો બે ઉપકોણોનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થાય.



પક્ષ: गम સુરેખા सर સુરેખા ઉપર પડી તે સાથે रगम અને मगस કોણો બનાવે છે.

સાધ્ય: ∠रगम+∠मगस=૨ કાટખુણા=૧૮૦°.

સાબીતી: ધારો કે એક गप સુરેખા गर માંથી નીકળી આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે દિશામાં ફરીને गस સુરેખામાં મળી જાય છે, તેટલામાં ∠रगम અને ∠मगस કોણો બનાવે છે અને ∠रगस સરલકોણ બને છે.

∴ ∠रगम+∠मगस=∠रगस

=૨ કાટખુણા=૧૮૦°

ઉપસિદ્ધાન્તઃ સાબીત કરેલા સિદ્ધાન્ત ઉપરથી સહેલાઇથી નીકળી આવતા સિદ્ધાન્તને ' ઉપસિદ્ધાન્ત ' કહે છે.

ઉપસિદ્ધાન્તઃ ૧ બે સુરેખાઓ પરસ્પર છેદે તો તેમનાથી બનેલા ચાર કોણોનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય.

૨. ગમે તેટલી સુરેખાઓ એકજ બિંદુમા આવી મળે તો બિંદુ આગળ થતા બધા કોણોનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય.

મનોયત્ન ૧

૧. સિદ્ધાન્ત ૧ ના ઉપસિદ્ધાન્તો સિદ્ધાન્તનું પ્રમાણ લઇને અને સ્વતંત્ર રીતે સાબીત કરો.

૨. " પૂરકકોણો " વાપરીને પહેલા સિદ્ધાન્તની પ્રતિજ્ઞા બોલો.

૩. પહેલા અને ત્રીજા સિદ્ધાન્તની આકૃતિઓમા પૂરકકોણોના નામ આપો.

૪. એક સુરેખા બીજી સુરેખાને કાટખુણે છેદે તો બાકીના કોણો પણ કાટખુણા છે એ સાબીત કરો.

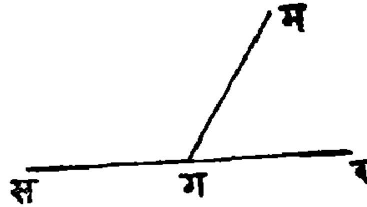
૫. સરખા કોણોના કોટિકોણ અને પૂરકકોણો સરખા છે.

૬. **सर, सग,** અને **सम** સુરેખાઓ **स** માંથી દોરેલી છે. ∠**रसग** ને **सप** અને ∠**गसम** ને **सध** સુરેખાઓ દુભાગે છે. સાબીત કરોઃ ∠**पसध**$=\frac{1}{2}$ ∠**रसम**

૭. એક સુરેખા ઉપર બીજી સુરેખા પડે તો ઉપકોણોને દુભાગનારી સુરેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.

સિદ્ધાન્ત ૨

૧ જો બે ઉપકોણોનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થાય, તો તેમની બહારની ભુજાઓ એક જ સુરેખામાં છે.



પક્ષ : ∠ रगम + ∠ मगस = બે કાટખુણા.
સાધ્ય : रग અને गस એક જ સુરેખામાં છે.
સાબીતી : ∠ रगम + ∠ मगस = ∠ रगस
અને ∠ रगम + ∠ मगस = બે કાટખુણા પક્ષ
∴ ∠ रगस = બે કાટખુણા.
∴ ∠ रगस સરલકોણ છે.
∴ रगस સુરેખા છે.
∴ रग અને गस એક જ સુરેખામાં છે.

ઉપસિદ્ધાન્ત : એક જ બિંદુ આગળ બનતા ત્રણ અથવા વધારે કોણોનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થતો હોય, તો તેમની બહારની ભુજાઓ એક જ સુરેખામાં હોય.

વ્યત્યાસ : જે બે સિદ્ધાન્તોમાં એકનો પક્ષ બીજાનું સાધ્ય અને એકનુ સાધ્ય બીજાનો પક્ષ હોય, તે બન્ને સિદ્ધાન્તો પરસ્પર **વ્યત્યાસ સિદ્ધાન્તો** કહેવાય છે.

[**સૂચના :** વ્યત્યાસ = ઉલટો. કોઇ પણ સિદ્ધાન્તનો વ્યત્યાસ સિદ્ધાન્ત હોઇ શકે છે; પણ સિદ્ધાન્ત સત્ય હોય તે ઉપરથી તેનો વ્યત્યાસ હંમેશાં સત્ય જ હોય એમ નથી.]

મનોયત્ન ૨

૧. सरग સુરેખાના र બિંદુમાંથી रम અને रप, सग ની વિરુદ્ધ બાજુઓ ઉપર ∠ सरम = ∠ गरप બનાવે, તો मरप સુરેખા છે, એ સાબીત કરો.

૨. मस, मर અને मग નામની ત્રણ સુરેખાઓ म બિંદુમાંથી દોરેલી છે. मप, ∠ समर ને અને मध ∠ रमग ને દુભાગે છે. જો ∠ पमध એ કાટખુણો હોય તો समग સુરેખા છે.

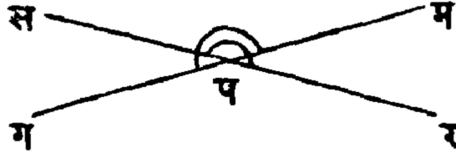
૩. એક સુરેખા ઉપર स, र, ग અને म ચાર બિંદુઓ હોય અને सग = रम હોય, તો सर = गम.

૪. स, र, ग, બિંદુઓ એક સુરેખા ઉપર આવેલાં છે. ∠ मगस = ∠ परग થાય એ રીતે सम અને रप સુરેખાઓ દોરેલી છે. સાબીત કરો: ∠ मसग + ∠ परस = ૨ કાટખુણા.

૫. ઉપરના પ્રશ્નમાં मस ને ध સુધી લંબાવી સાબીત કરો: ∠ धसर = ∠ परस.

સિદ્ધાન્ત ૩

બે સુરેખાઓ પરસ્પર છેદે, તો અભિકોણો સરખા થાય.



પક્ષ : सर અને गम સુરેખાઓ પરસ્પર प બિંદુમાં છેદે છે.

સાધ્ય : ∠ सपग = ∠ मपर; ∠ सपम = ∠ गपर.

સાબીતી : ∠ सपग + ∠ सपम = ૨ કાટખુણા. ∵ गम સુરેખા
∠ सपम + ∠ मपर = ૨ કાટખુણા. ∵ सर ,,
∴ ∠ सपग + ∠ सपम = ∠ सपम + ∠ मपर.
∠ सपम બન્ને બાજુમાં સામાન્ય છે.
∴ ∠ सपग = ∠ मपर.
આ જ પ્રમાણે ∠ सपम = ∠ गपर સાબીત થાય.

મનોયત્ન ૩

૧. ઉપરની આકૃતિમાં સાબીત કરો: ∠ सपम = ∠ गपर.

૨. સિદ્ધાન્તના વ્યત્યાસની પ્રતિજ્ઞા લખો અને તે સાબીત કરો.

૩. કોઇ પણ ત્રિકોણની સઘળી ભુજાઓ બન્ને દિશામાં લંબાવી સરખા કોણો સરખી નિશાનીઓથી બતાવો.

૪. સિદ્ધાન્તની આકૃતિમાં पघ, ∠ सपग ને દુભાગે, તો घप લંબાવવાથી ∠ मपर પણ દુભાગાય.

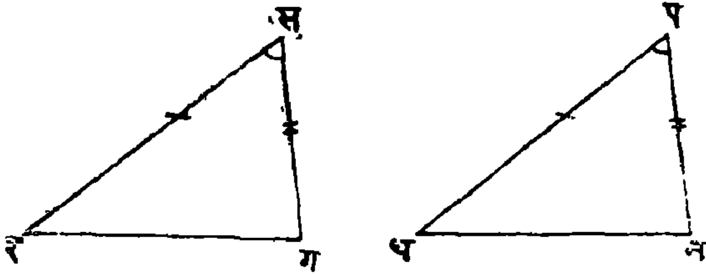
૫. અભિકોણોને દુભાગનારી રેખાઓ એક જ સુરેખામાં છે.

પ્રકરણ ૩

ત્રિકોણો

સિદ્ધાન્ત ૪

એક ત્રિકોણની બે ભુજાઓ અને અંતર્ગતકોણ બીજા ત્રિકોણની બે ભુજાઓ અને અંતર્ગતકોણ બરાબર હોય, તો બન્ને ત્રિકોણો એકરૂપ છે.



પક્ષ : △ सरग અને △ पधन માં
सर = पध, सग = पन, અને ∠ रसग = ∠ धपन.

સાધ્ય : △ सरग ≡ △ पधन.

સાબીતી : △ सरग ને △ पधन ઉપર એવી રીતે મૂકો કે
स, प ઉપર પડે અને सर, पध ઉપર પડે.
∵ सर = पध — પક્ષ.
∴ र, ध માં અને सर, पध માં મળી જાય છે.
અને ∵ ∠ रसग = ∠ धपन — પક્ષ,
∴ सग, पन ઉપર પડે છે.

વળી ∵ सग = पन પક્ષ,

∴ ग, न મા અને सग, पन માં મળી જાય છે.

હવે ∵ र, ध માં અને ग, न માં મળે છે. સાબીત કર્યું.

∴ रग, धन માં મળી જાય છે.

∴ △ सरग, △ पधन સાથે એકાકાર થાય છે.

∴ △ सरग ≅ △ पधन.

સૂચના: (ક) આ સિદ્ધાન્ત ઉપરથી સાબીત થાય છે કે ∠ र = ∠ ध, ∠ ग = ∠ न અને रग = धन.

(ખ) જે કોણો સરખા સાબીત થાય છે તે આપેલી સરખી ભુજાઓની સામેના કોણો છે.

(ગ) એક ઉપર બીજો ત્રિકોણ મૂકી ત્રિકોણની એકરૂપના સાબીત કરવામાં યાદ રાખવું કે ત્રિકોણો ગમે તે સ્થિતિમાં આવેલા હોય તો પણ સરખી રેખા ઉપર જ સરખી રેખા અને સરખા કોણ ઉપર જ સરખો કોણ પડે તેવી રીતે એક ત્રિકોણ ઉપર બીજાને મૂકવો.

મનોયત્ન ૪ ક

૧. સમદ્વિભુજ ત્રિકોણમાં સમભુજાઓના અંતર્ગતકોણને દુભાગનારી રેખા (ક) પાયાને લંબ છે, અને (ખ) પાયાને દુભાગે છે.

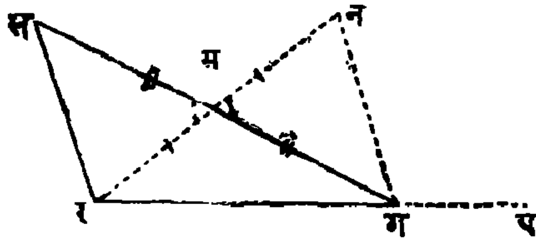
૨. સમદ્વિભુજ ત્રિકોણના પાયાના કોણો સરખા છે.

૩. કોઇ પણ ત્રિકોણમાં મધ્યગા પાયાને લંબ હોય, તો ત્રિકોણ સમદ્વિભુજ છે.

૪. सर ના મધ્ય બિંદુ म માંથી मल લંબ દોરવામાં આવે તો मल ઉપરનું કોઇ પણ બિંદુ स અને र થી સમાન અંતરે છે

સિદ્ધાન્ત ૫

ત્રિકોણની એક ભુજા લંબાવીએ તો બાહ્યકોણ કોઈ પણ દૂરના અંતઃકોણથી મોટો છે



પક્ષ : △ सरग ની रग ભુજા प સુધી લંબાવો.

સાધ્ય : ∠ सगप > ∠ गसर અથવા ∠ सरग

રચના : म, सग નું મધ્યબિંદુ લ્યો. रम જોડો અને मन = रम થાય ત્યાં સુધી रम લંબાવો. गन જોડો.

સાબીતી : △ मरस અને △ मनग માં.

सम = मग, रम = मन — રચના

∠ समर = ∠ गमन — અભિકોણો,

∴ △ मरस ≅ △ मनग.

∴ ∠ मगन = ∠ मसर.

હવે ∵ ∠ सगप > ∠ मगन,

∴ ∠ सगप > ∠ मसर.

∴ ∠ सगप > ∠ गसर.

આ જ પ્રમાણે रग નું મધ્યબિંદુ લઈ ∠ सगप > ∠ सरग સાબીત કરી શકાય.

મનોયત્ન ૫

૧. આ સિદ્ધાન્તની આકૃતિમાં ∠ सगप > ∠ सरग સ્વ-તંત્ર રીતે સાબીત કરો.

૨. △ सरग ની અંદર કોઇ એક म બિંદુ લ્યો. रम અને गम જોડો. रम, सग ને प માં મળે ત્યાં સુધી લંબાવો. સાબીત કરો કે ∠ रमग > ∠ स.

૩. ત્રિકોણની અંદરના કોઇ એક બિંદુ આગળ પાયાથી અંત-રિત કોણ શિરઃકોણ કરતાં મોટો છે.

મનોયત્ન ૪ ખ

૧. मस અને मग, म માંથી દોરેલી રેખાઓ છે. मन, ∠ समग ને દ્વિભાગે, તો मन ઉપરનું કોઇ પણ બિંદુ मस અને मग થી સરખે અંતરે છે.

૨. ત્રિકોણની બે ભુજાઓનાં મધ્યબિંદુઓમાંથી તે જ ભુજાઓને લંબ દોર્યા હોય, તો બન્ને લંબ જે બિંદુમાં મળે તે બિંદુ ત્રિકોણ-નાં ત્રણે શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે છે.

૩. △ सरग માં सर = सग છે. सर અને सग માંથી અનુક્રમે सप = सध કાપી લઇએ, તો रध = गप થાય.

૪. सरगम ચતુષ્કોણનો रम વિકર્ણ છે. सर = मग અને ∠ सरम = ∠ रमग હોય, તો સાબીત કરોઃ ∠ स = ∠ ग અને सम = रग.

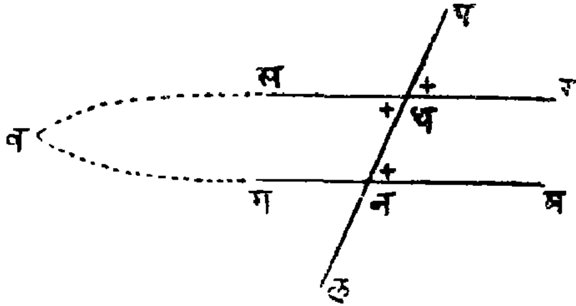
૫. △ सरग ની ત્રણે ભુજાઓ ઉપર સમભુજ △ ઓ सरप, रगध અને गसन તેમનાં શિરોબિંદુઓ બહારની બાજુ પડે તેવી રીતે દોર્યા છે. સાબીત કરો : सध = रन = गप.

પ્રકરણ ૪

સમાન્તર રેખાઓ

સિદ્ધાન્ત ૬

એક સુરેખા બીજી બે સુરેખાઓને છેદે અને
૧. વ્યુત્ક્રમકોણો સરખા બનાવે,
૨. સંગતકોણો સરખા બનાવે, અથવા
૩. છેદકરેખાની એક બાજુના અંતઃકોણોનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થાય,
તો તે બે સુરેખાઓ સમાન્તર છે.



૧. પક્ષ : **पल, सर** અને **गम** ને **घ, न** માં છેદે છે અને $\angle$ **सघन** અને $\angle$ **घनम** વ્યુત્ક્રમકોણો સરખા બનાવે છે.

સાધ્ય : **सर** $\parallel$ **गम.**

સાબીતી : જો **सर** અને **गम** સમાન્તર ન હોય તો તેઓ ડાબી કે જમણી બાજુએ લંબાવવાથી કોઈ જગાએ મળવી જોઈએ. ધારો કે ડાબી બાજુએ લંબાવવાથી તે આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે **व** માં મળે છે અને **घनव** ત્રિકોણ બનાવે છે

∴ બહારનો ∠ घनम > અંદરના દૂરના ∠ नधव. પણ
પક્ષ પ્રમાણે આ બન્ને કોણો સરખા છે.
∴ सर અને गम રેખાઓ ડાબી બાજુએ લંબાવવાથી
મળવી જોઈએ નહિ.

તેમને જમણી બાજુએ લંબાવવામાં આવે તો પણ તે મળે
નહિ એ ઉપર પ્રમાણે સાબીત કરી શકાય.
∴ सर અને गम બન્ને બાજુએ લંબાવવાથી મળે નહિ.
∴ सर ∥ गम.

૨. પક્ષ : ∠ पघर = સંગત ∠ घनम.

સાધ્ય : सर ∥ गम.

સાબીતી : ∠ पघर = અભિ ∠ सघन.
અને ∠ पघर = સંગત ∠ घनम. પક્ષ.
∴ ∠ सघन = ∠ घनम.
અને આ વ્યુત્ક્રમકોણો છે,
∴ सर ∥ गम.

૩. પક્ષ : ∠ रघन + ∠ घनम = ૨ કા. ખુ.

સાધ્ય : सर ∥ गम.

સાબીતી : ∠ रघन + ∠ सघन = ૨ કા. ખુ. ∵ सर સુરેખા.
∠ रघन + ∠ घनम = ૨ કા. ખુ. પક્ષ.
∴ ∠ रघन + ∠ सघन = ∠ रघन + ∠ घनम.
∴ ∠ सघन = ∠ घनम.
અને આ વ્યુત્ક્રમકોણો છે,
∴ सर ∥ गम.

મનોયત્ન ૬

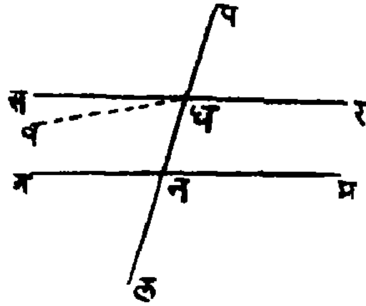
૧. છઠ્ઠા સિદ્ધાન્તના (૨) અને (૩) ભાગ (૧) ની મદદ લીધા સિવાય સાબીત કરો.

૨. જો બે સુરેખાઓ ત્રીજી સુરેખાને લંબ હોય, તો તે બે સમાન્તર છે.

૩. ચતુષ્કોણના કર્ણો પરસ્પર દુભાગે. તો તે * સમાન્તર-ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધાન્ત ૭

એક સુરેખા બે સમાન્તર સુરેખાઓને છેદે, તો (૧)વ્યુત્ક્રમકોણો સરખા, (૨) અગતકોણો સરખા (૩) અને છેદકરેખાના એક બાજુના અંદરના બે કોણોનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થાય.



પક્ષ : पल, सर અને गम || સુરેખાઓને ध અને न બિંદુઓમાં છેદે છે.

* જે ચતુષ્કોણની સામેની ભુજાઓ સમાન્તર હોય તેને **સમાન્તરચતુષ્કોણ** કહે છે.

સાધ્ય : ૧. ∠ सधन = ∠ धनम; ∠ रधन = ∠ धनग.
૨. ∠ रधप = ∠ धनम. ∠ सधप = ∠ धनग.
૩. ∠ रधन + ∠ धनम = ∠ सधन + ∠ धनग = ૧૮૦°.

સાબીતી : ૧. જો ∠ सधन = ∠ धनम ન હોય તો ધારો કે ∠ वधन = વ્યુ. ∠ धनम થાય તેમ वध દોરી છે.
∴ वध ‖ गम.
પણ सर ‖ गम પક્ષ.
∴ એક બિંદુમાં મળતી सध અને वध બન્ને સુરેખાઓ गम ને સમાન્તર હોવી જોઇએ.
પણ પ્લેફેરના પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ મુજબ આ અશક્ય છે.
∴ ∠ सधन અને ∠ धनम સરખા ન હોય એ અશક્ય છે.
∴ ∠ सधन = વ્યુ ∠ धनम.
આ જ પ્રમાણે ∠ रधन = ∠ धनग સાબીત કરી શકાય.
૨. ∠ सधन = અધિ. ∠ रधप,
અને ∠ सनघ વ્યુ. ∠ धनम. સિધ્ધ કર્યું.
∴ ∠ रधप = સંગત ∠ धनम.
આજ પ્રમાણે ∠ सधप = સંગત ∠ धनग સાબીત કરી શકાય.
૩. ∠ रधन + सधन = ૧૮૦° ∵ सर સુરેખા.
અને ∠ सधन = વ્યુ. ∠ धनम.
∴ ∠ रधन + ∠ धनम = ૧૮૦°.
આ જ પ્રમાણે ∠ सधन + ∠ धनग = ૧૮૦° સાબીત કરાય.

ઉપસિદ્ધાન્ત : ૧. બે અથવા વધારે સમાન્તર સુરેખાઓને છેદતી સુરેખા જો એકને લંબ હોય તો તે બધી સમાન્તર સુરેખાઓને પણ લંબ હોય.

૨. એક સુરેખાને સમાન્તર સુરેખાઓ પરસ્પર સમાન્તર છે.

મનોયત્ન ૭

૧. સિદ્ધાન્ત ૭ ના (૨) અને (૩) ભાગ, (૧) ની મદદ લીધા સિવાય સાબીત કરો.

૨. ચતુષ્કોણની સામેની ભુજાઓ સમાન્તર હોય અને એક કોણ કાટખુણો હોય, તો તેના બધા કોણ કાટખુણા હોવા જોઇએ.

૩. ચતુષ્કોણની સામેની ભુજાઓ સમાન્તર હોય, તો સામેના કોણો સરખા હોવા જોઇએ.

૪. **सरगम** ચતુષ્કોણમાં **सर** અને **मग** સરખી અને સમાન્તર હોય, તો **रम** વિકર્ણ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે.

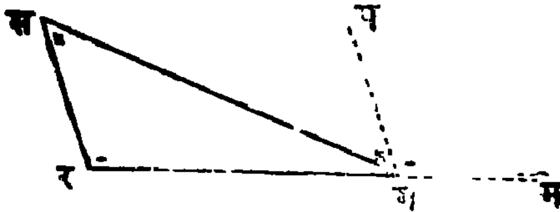
૫. ત્રિકોણના બહારના કોણને દુભાગનારી રેખા તેની સામેની ભુજાને સમાન્તર હોય, તો ત્રિકોણના બે કોણો સરખા હોવા જોઇએ.

૬. કોઇ પણ ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયાને સમાન્તર રેખા દોરી સિદ્ધ કરો કે ત્રિકોણના અંદરના ત્રણે કોણોનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થાય છે.

૭. એક ત્રિકોણનાં બે શિરોબિંદુઓમાંથી તેમની સામેની ભુજાઓને સમાન્તર રેખાઓ દોરી ચતુષ્કોણ પૂરો કરી સાબીત કરો કે ચતુષ્કોણના બે પાસેના કોણો મળી બે કાટખુણા બરાબર થાય છે.

સિદ્ધાન્ત ૮

કોઇ પણ ત્રિકોણના ત્રણે અંતઃકોણો મળીને બે કાટખુણા બરાબર થાય છે.



પક્ષ : ∠ रसग, ∠ गरस અને ∠ सगर, △सरग ના અંતઃકોણો છે.

સાધ્ય : ∠ रसग + ∠ गरस + ∠ सगर = ૧૮૦°.

રચના : रग ને म સુધી લંબાવો.
ग માંથી गप ∥ रस દોરો.

સાબીતી : ∠ रसग = વ્યુ. ∠ सगप
∠ गरस = સં. ∠ मगप } ∵ गप ∥ रस રચના.

∴ ∠ रसग + ∠ गरस = ∠ सगप + ∠ मगप = ∠ सगम.

∠ सगर બન્ને બાજુ ઉમેરો,

∴ ∠ रसग + ∠ गरस + ∠ सगर = ∠ सगम + ∠ सगर.

પણ ∠ सगम + ∠ सगर = ૧૮૦° ∵ रम સુરેખા.

∴ ∠ रसग + ∠ गरस + ∠ सगर = ૧૮૦°.

ઉપસિદ્ધાન્તો :

૧. કોઇ પણ ત્રિકોણની એક ભુજા લંબાવી હોય તો બહારનો કોણ દૂરના બે અંત:કોણોની બરાબર છે.

૨. કોઇ પણ ત્રિકોણના બે અંત:કોણો મળીને બે કાટખુણા કરતાં ઓછા છે.

૩. કોઇ પણ ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા બે અંત:કોણો લઘુકોણ હોય છે.

૪. કોઇ બે ત્રિકોણમાં એકના બે કોણો બીજાના બે કોણો સમાન હોય તો ત્રીજા કોણો પણ સમાન છે.

૫. કોઇ પણ ત્રિકોણના બે કોણોનો સરવાળો એક કાટખુણા બરાબર થાય, તો તે ત્રિકોણ કાટખુણ ત્રિકોણ છે અને તેનો વ્યત્યાસ.

૬. કોઇ પણ એક બહારના બિંદુમાંથી એક સુરેખાને ફક્ત એકજ લંબ દોરી શકાય.

૭. કોઇ પણ ચતુષ્કોણના બધા અંત:કોણોનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર છે.

મનોયત્ન ૮

૧. સમભુજત્રિકોણનો દરેક કોણ ૬૦° છે.

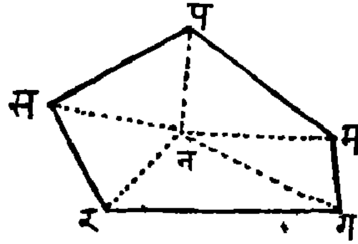
૨. સમદ્વિભુજકાટખુણ ત્રિકોણનો દરેક સરખો કોણ ૪૫° છે

૩. કાટખુણ ત્રિકોણના કાટખુણામાંથી કર્ણને લંબ દોરવાથી બનતા બન્ને ત્રિકોણો મૂળ ત્રિકોણ સાથે સમકોણ છે.

૪. કોઇ પણ પાયા ઉપર બે ત્રિકોણો એક ત્રિકોણ બીજાની અંદર આવે તેવી રીતે આવ્યા હોય, તો પાયાની સામેનો બહારના ત્રિકોણનો કોણ અંદરના ત્રિકોણના પાયાની સામેના કોણ કરતાં નાનો છે.

સિદ્ધાન્ત ૯

કોઇ પણ બહુકોણની ભુજાઓની સંખ્યા स હોય, તો તેના અંતઃકોણોનો સરવાળો (૨स−૪) કાટખુણા બરાબર થાય.



પક્ષ : **सरगमप** स ભુજાઓથી બનેલો બહુકોણ છે.

સાધ્ય : ∠स+∠र+∠ग+∠म … = (૨स−૪) કા. ખુ.

રચના : આકૃતિની અંદર કોઇ એક न બિંદુ લ્યો. नस, नर नग, … વગેરે જોડો એટલે स ત્રિકોણો બનશે.

સાબીતી: स ત્રિકોણોના અંતઃકોણો= $\left\}$ ∠स+∠र+∠ग+… +न આગળના કોણો

∴ ∠स+∠र+∠ग+… +न આગળના કોણો } = ૨स કા. ખુ.

न આગળના કોણોનો સરવાળો = ૪ કા. ખુ.

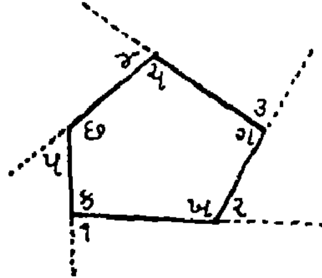
∴ ∠स+∠र+∠ग+…+૪ કા. ખુ=૨स કા. ખુ.

∴∠स+∠र+∠ग+…=૨स કા. ખુ.−૪ કા. ખુ.

= (૨स−૪) કા. ખુ.

ઉપસિદ્ધાન્ત :

કોઇ પણ બહુકોણની ભુજાઓ અનુક્રમે લંબાવીએ તો બધા બાહ્યકોણોનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય.



[અંતઃકોણો = (૨સ–૪) કા. ખુ.
બાહ્યકોણો + અંતઃકોણો = ૨સ કા. ખુ.
∴ બાહ્યકોણો + (૨સ–૪) કા. ખુ. = ૨સ કા. ખુ.
∴ બાહ્યકોણો = ૪ કા. ખુ.]

સૂચના : સમબહુકોણનો અંતઃ કે બાહ્ય કોણ આપેલો હોય તે ઉપરથી તે કેટલી ભુજાઓનો છે તેની ગણતરી નીચે પ્રમાણે થાય:

$$\text{સમબહુકોણની ભુજાઓ} = \frac{૩૬૦^\circ}{\text{બાહ્યકોણ}}$$

$$\text{,,} \quad \text{,,} = \frac{૩૬૦^\circ}{૧૮૦^\circ - \text{અંતઃકોણ}}$$

મનોયત્ન ૯

૧. ત્રણ બહુકોણોના અંતઃકોણોનો સરવાળો અનુક્રમે ૬, ૧૬ અને ૨૦ કા. ખુ. હોય, તો દરેક બહુકોણની ભુજાઓ કેટલી ?

૨. એક ચતુષ્કોણના ત્રણ કોણો ૮૦°, ૧૦૦° અને ૧૫૦° હોય તો ચોથો કોણ કેટલો ?

૩. ૪, ૫, ૬, ૮ અને ૧૦ ભુજાના સમબહુકોણોનો દરેક અંતઃ અને બાહ્ય કોણ કેટલો ?

૪. છ સમબહુકોણોના અંતઃકોણો અનુક્રમે ૧૬૨°, ૧૫૦°, ૬૦°, ૧૦૮°, ૧૩૫° અને ૧૪૪° હોય, તો તે દરેકને કેટલી ભુજાઓ હોય ?

૫. પાંચ સમબહુકોણોના બાહ્યકોણો અનુક્રમે ૬૦°, ૪૫°, ૩૬°, ૩૦° અને ૧૮° હોય, તો તે દરેકને કેટલી ભુજાઓ હશે ?

૬. દરેકનો બાહ્યકોણ અનુક્રમે ૭°, ૧૧°, ૧૩°, ૧૫°, ૨૧°, અને ૩૩° હોય તેવા સુમબહુકોણ બની શકે ? કારણ આપો.

૭ બાહ્યકોણ પહોળો હોય એવી સમકોણ આકૃતિ કયી ?

૮. ઓછામાં ઓછી ભુજાવાળા સમકોણનો દરેક કોણ કેવડો ?

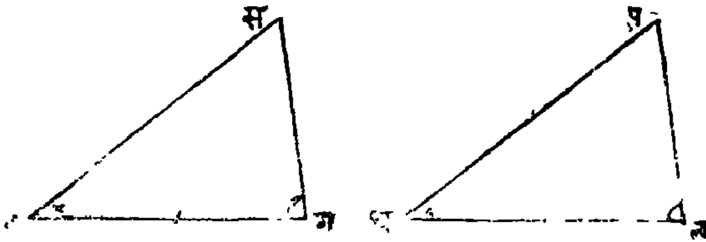
૯ એક સમબહુકોણનો અંતઃકોણ બાહ્યકોણથી ત્રણ ગણો છે, તો કેટલી ભુજાઓ હશે ?

૧૦. કોઇ એક પંચકોણ દોરો. તેની ભુજાઓ બન્ને બાજુ લંબાવી તારાના આકારની આકૃતિ બનાવો. સાબીત કરો કે તારાના ખુણાઓના કોણોનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર છે.

૧૧ એક ત્રિકોણોની ત્રણે ભુજાઓ અનુક્રમે લંબાવતાં બે બાહ્ય-કોણોનો સરવાળો ત્રીજા બાહ્યકોણથી બમણો હોય, તો ત્રિકોણનો એક કોણ ૬૦° નો છે.

સિદ્ધાન્ત ૧૦

જો એક ત્રિકોણના બે કોણો અને એક ભુજા બીજા ત્રિકોણના બે કોણો અને અનુવર્તિ ભુજાની બરાબર હોય તો બન્ને ત્રિકોણો એકરૂપ છે.



પક્ષ : △ઓ **सरग** અને **पधन** માં ∠ **स** = ∠ **प**, ∠ **र** = ∠ **ध** અને **रग**=**धन**.

સાધ્ય : △**सरग** ≡ △**पधन**.

સાબીતી : ∠ **ग** = ∠ **न** ∵ બે △ઓના બે કોણો સમાન.

△**सरग** ને △**पधन** ઉપર એવી રીતે મૂકો કે **र**, **ध** ઉપર પડે અને **रग**, **धन** ઉપર પડે.

ग, **न** ઉપર પડશે. ∵ **रग** = **धन** પક્ષ

रस, **धप** ઉપર અને **स धप** કે **धप** લંબાવેલી ઉપર પડશે. ∵ ∠ **र**=∠ **ध** પક્ષ

गस, **नप** ઉપર અને **स**, **नप** કે **नप** લંબાવેલી ઉપર પડશે ∵ ∠ **ग**=∠ **न**

∴ **रस** અને **गस** નું સામાન્ય બિંદુ **स**, **धप** અને **नप** ના સમાન્યબિંદુ **प** ઉપર પડશે.

∴ △**सरग**, △**पधन** સાથે એકાકાર થશે.

∴ △**सरग** ≡ △**पधन**.

મનોયત્ન ૧૦

૧. આ સિદ્ધાન્તની આકૃતિમાં બાકીની સરખી ભુજાઓ અને સરખા કોણો બનાવો.

૨. △ઓ सरग અને पधन માં सर = धन ∠ र = ∠ प અને ∠ स = ∠ ध હોય, તો બન્ને ત્રિકોણો એકરૂપ થાય? જવાબ માટે કારણ આપો.

૩. ત્રિકોણના શિરઃકોણને દુભાગનારી રેખા પાયાને કાટખુણે મળે તો ત્રિકોણ સમદ્વિભુજ છે.

૪. એક ત્રિકોણના બે કોણો સરખા હોય તો ત્રીજા કોણને દુભાગનારી રેખા સામેની ભુજાને કાટખુણે દુભાગે છે.

૫. सरगम ચતુષ્કોણનો सग વિકર્ણ છે. ∠ रसग = ∠ मगस અને ∠ रगस = ∠ मसग હોય, તો સાબીત કરો सर = मग.

૬. કોઇ પણ કોણને દુભાગનારી રેખાના એક બિંદુમાંથી તેની ભુજાઓ ઉપર દોરેલા લંબ સરખા છે.

૭. रम અને गम, सरग ત્રિકોણના ∠ र અને ∠ ग ને દુભાગે છે, म માંથી ત્રણે ભુજાઓને લંબ દોર્યા હોય, તો તે બધા સરખા થાય.

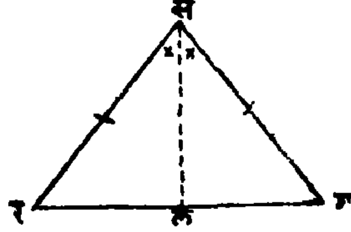
૮. ત્રિકોણની ત્રણે ભુજાઓથી સરખે અંતરે આવેલું બિંદુ શોધી કહાડો અને તે ભુજાઓથી સરખે અન્તરે છે તે સાબીત કરો.

૯. सरगम ચતુષ્કોણમાં सर = गम; सग અને रम વિકર્ણો प માં મળે છે; ∠ गसर=∠ सगम; સાબીત કરો કે વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.

૧૦. △ઓ गसर અને मसर, એકજ પાયા ઉપર અને પાયાની એક જ બાજુએ આવેલા છે. ∠ गसर = ∠ मरस, ∠ गरस = ∠ मसर હોય, તો गर = मस.

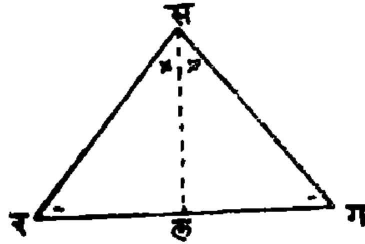
સિદ્ધાન્ત ૧૧

સમદ્વિભુજ ત્રિકોણના પાયાના કોણો સરખા છે.



[ઉપરની આકૃતિ ઉપરથી સાબીત કરો.]

વ્યત્યાસ: ત્રિકોણના બે કોણો સરખા હોય. તો તેમની સામેની ભુજાઓ પણ સરખી છે.



[ઉપરની આકૃતિ ઉપરથી સાબીતી આપો.]

ઉપસિદ્ધાન્તો :

(૧) સમભુજ ત્રિકોણ સમકોણ છે.

(૨) સમકોણ ત્રિકોણ સમભુજ છે.

(૩) સમદ્વિભુજ ત્રિકોણમાં પાયાની સામેના કોણને દુભાગનારી રેખા પાયાને કાટખુણે દુભાગે છે.

(૪) સમદ્વિભુજ ત્રિકોણની સરખી ભુજાઓ सर, सग ને અનુક્રમે प, घ સુધી લંબાવવામાં આવે તો બાહ્યકોણો સરખા થાય.

મનોયત્ન ૧૧

૧. સમદ્વિભુજ ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયાને દોરેલો લંબ પાયાને અને શિરઃકોણને દુભાગે છે.

૨. પાયાના કોણમાંથી સમભુજ કે સમદ્વિભુજ ત્રિકોણની સામેની ભુજાઓ ઉપર દોરેલા લંબ સરખા છે.

૩. કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણનું મધ્યબિંદુ ત્રણે શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે છે.

૪. $\triangle$सरग માં सर = सग; प, घ અને न અનુક્રમે सर, रग અને गस નાં મધ્ય બિંદુઓ છે. સાબીત કરો:—

पघ = घन; रन = गप; $\angle$सपघ = $\angle$सनघ.

૫. सरगम પતંગાકારના એક ચતુષ્કોણમાં सर = सम અને रग = गम છે. સાબીત કરો કે सग, रम ને કાટખુણે દુભાગે છે.

૬. सरगम ચતુષ્કોણમાં सर = सम અને $\angle$र = $\angle$म છે. સાબીત કરો: गर = गम.

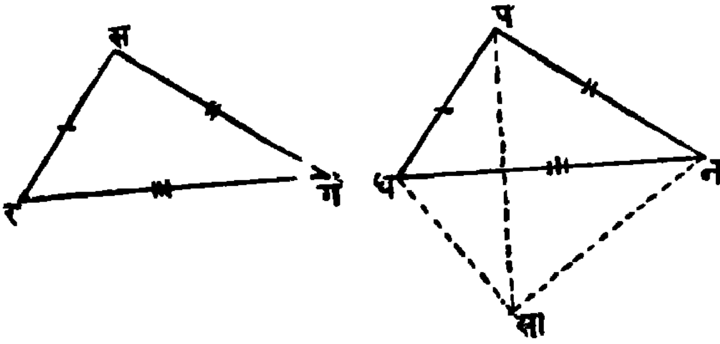
૭. $\triangle$सरग માં रग પાયાને सप અને सल એ સમાન રેખાઓ प અને ल બિંદુઓમાં મળે છે અને $\angle$ रसप=$\angle$ गसल બનાવે છે, તો $\triangle$ सरग સમદ્વિભુજ છે એ સાબીત કરો.

૮. सरग સમદ્વિભુજ ત્રિકોણમાં सर = सग છે. रग ને સમાન્તર રેખા सर અને सग ને અનુક્રમે प અને घ માં મળે છે. સાબીત કરો: सपघ સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ છે.

૯. સમદ્વિભુજ $\triangle$सरग માં सर = सग છે. रल, सग ને લંબ દોરેલો છે અને તે તેને ल માં મળે છે. સાબીત કરો: $\angle$ स = २ $\angle$ लरग.

સિદ્ધાન્ત ૧૨

જો એક ત્રિકોણની ત્રણ ભુજાઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણ ભુજાઓ સમાન હોય, તો ત્રિકોણો એકરૂપ છે.



પક્ષ : △ ઓ सरग અને पधन માં
सर = पध, सग = पन, रग = धन.

સાધ્ય : △ सरग ≡ △ पधन.

રચના : ધારો કે रग, △सरग ની મોટામાં મોટી ભુજા છે. △ सरग ને △ पधन ઉપર એવી રીતે મૂકો કે रग તેની સમાન રેખા धन માં મળી જાય અને स બિંદુ पની સામેની બાજુએ सा ઉપર પડે. पसा જોડો.

સાબીતી : △सरग ≡ △साधन ∵ એકજ ત્રિકોણ બીજી જગાએ મૂકેલો છે.

હવે ∠धपसा = ∠धसाप ∵ धप = धसा
∠नपसा = ∠नसाप ∵ नप = नसा
∴ આખો ∠प = આખો ∠सा અથવા ∠स.
હવે △ ઓ सरग અને पधन માં

$$\left.\begin{array}{l} सर = पध \\ सग = पन \end{array}\right\}$$ પક્ષ.

અંતઃ ∠स = અંતઃ ∠प સાબીત કર્યું.

∴ △ सरग ≡ △ पधन.

મનોયન ૧૨

૧. सरगम ચતુષ્કોણમાં मर = गम અને रग = मस હોય, તો (ક) ∠ समग = ∠ सरग; (ખ) ચતુષ્કોણની ભુજાઓ ∥ છે.

૨. સમચતુર્ભુજના કર્ણો તેના કોણોને દુભાગે છે અને એકબીજાને કાટખુણે દુભાગે છે અને સામાન્ય પાયાને પણ કાટખુણે દુભાગે છે.

૩. બે સમદ્વિભુજ ત્રિકોણો એક જ પાયા ઉપર દોરેલા હોય તો તેમનાં શિરોબિંદુઓને જોડનારી રેખા શિરોબિંદુ આગળનો કોણોને દુભાગે છે.

૪. ત્રણ સુરેખાઓ समप, रमल, અને गमध, म બિંદુમાંથી म આગળ દુભાગાય તેવી રીતે દોરેલી છે. સાબીત કરોઃ

△सरग ≡ △पलध

૫. કોઇ એક વર્તુલની सर જીવાનું મધ્યબિંદુ म હોય અને क વર્તુલનું કેન્દ્ર હોય, તો कम ⊥ सर.

૬. क કેન્દ્રવાળા વર્તુલમાં पल અને सर સરખી જીવાઓ દોરેલી હોય, તો તેમનાથી કેન્દ્ર આગળ બનતા કોણો સરખા છે.

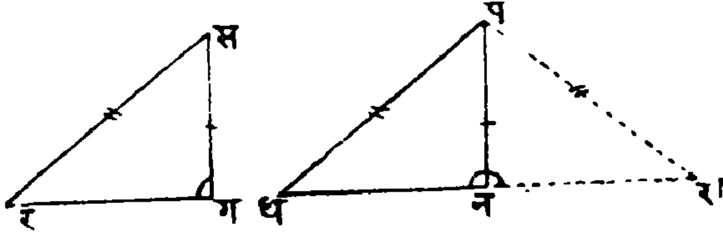
૭. સમભુજ ત્રિકોણની ભુજાઓનાં મધ્યબિંદુઓ જોડવાથી બનતો ત્રિકોણ પણ સમભુજ છે.

૮. કોઇ બે વર્તુલો એકબીજાને છેદે, તો છેદન બિંદુઓને જોડનારી રેખાને તેમનાં કેન્દ્રો જોડનારી રેખા કાટખુણે દુભાગે છે.

૯. △ पधन ની धप ને नप ભુજાઓ पમાં થઇને અનુક્રમે स અને र સુધી લંબાવી धस = नर બનાવી હોય અને धन = सर હોય, તો △सरध ≡ △नधर.

સિદ્ધાન્ત ૧૩

બે કાટખુણ ત્રિકોણુમાં એકનો કર્ણ અને એક ભુજા બીજાના કર્ણ અને એક ભુજા બરાબર હોય, તો ત્રિકોણો એકરૂપ છે.



પક્ષ : △ઓ सरग અને पधन માં ∠ग = ∠न = ૯૦°,
सर = पध, અને सग = पन.

સાધ્ય : △सरग ≡ △पधन.

રચના : △सरग ને △पधनની સાથે એવી રીતે મૂકો કે જેથી सग રેખા તેની બરાબર पन રેખા ઉપર પડે અને તેમાં મળી જાય અને र, धની સામેની બાજુએ रा ઉપર પડે.

સાબીતી : △सरग ≡ △परान ∵ એક જ ત્રિકોણ બીજી જગાએ મૂકેલો છે.

∴ ∠पनध + ∠पनरा = ૧૮૦° પક્ષ.

∴ धनरा સુરેખા છે.

હવે पध = सर = परा.

∴ ∠पधन = ∠परान = ∠सरग.

હવે △ઓ सरग અને पधनમાં

∠सरग = ∠पधन સાબીત કર્યું:

∠ग = ∠न }
सग = पन } પક્ષ

∴ △सरग ≡ △पधन.

મનોયત્ન ૧૩

૧. मस અને मर સુરેખાઓ વચ્ચે આવેલા કોઇ એક क બિંદુમાંથી मस અને मर ઉપર દોરેલા લંબ સરખા હોય, તો मक રેખા ∠ समर ને દુભાગે છે.

૨. કોઇ એક વર્તુલનું કેન્દ્ર क અને જીવા सर છે. कમાંથી જીવા ઉપર લંબ દોર્યો હોય તો તે જીવાને દુભાગે છે.

૩. रम અને गम, △सरगના ∠र અને ∠ग ને દુભાગે છે. સાબીત કરો કે मस જોડવામાં આવે તો તે ∠स ને દુભાગે.

૪. △सरगમાં रम અને गप અનુક્રમે सग અને सर ઉપર દોરેલો લંબ છે. જો रम = गप હોય તો ત્રિકોણ સમદ્વિભુજ છે.

૫. △सरगની सर અને सग ભુજાઓ प અને घ સુધી લંબાવી હોય અને ∠ परग અને ∠ घगर ને દુભાગનારી રેખાઓ म બિંદુમાં મળતી હોય તો मस પણ ∠ सને દુભાગે છે.

૬. કોઇ પણ વર્તુલમાં સરખી જીવાઓ કેન્દ્રથી સરખે અન્તરે હોય છે.

૭. △ઓ सरग અને पघनમાં सर = पघ, सग = पन અને सल લંબ = पम લંબ હોય, તો △सरग ≡ △पघन.

૮. બે ત્રિકોણોના પાયા, મધ્યગાઓ અને લંબ સરખા હોય તો ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

૯. ત્રિકોણની ભુજાઓને દુભાગનારા લંબ એકબિંદુગામી છે અને આ બિંદુ ત્રિકોણનાં ત્રણે શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે છે.

૧૦. ત્રિકોણના કોણોને દુભાગનારી રેખાઓ એકબિંદુગામી છે અને આ બિંદુ ત્રિકોણની ત્રણે ભુજાઓથી સરખે અંતરે છે.

૧૧. ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓથી સામેની ભુજાઓ ઉપર દોરેલા લંબ એકબિંદુગામી છે.

૧૨. બે ત્રિકોણોમાં એકની બે ભુજાઓ અને આ ભુજાઓની એકની સામેનો કોણ અનુક્રમે બીજાની બે ભુજાઓ અને આ ભુજાઓમાંની એકની સામેના કોણની બરાબર હોય, તો બાકીની સરખી ભુજાઓની સામેના કોણો સરખા અથવા પૂરક છે.

ત્રિકોણની એકરૂપતા ઉપર સૂચના.

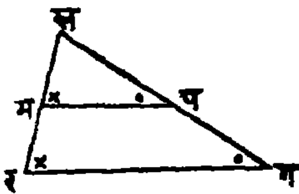
અત્યાર સુધી સાબીત કરેલા સિદ્ધાન્તો ઉપરથી સમજાશે કે બે ત્રિકોણો એકરૂપ થવાને નીચે આપેલી શરતો આવશ્યક છે:

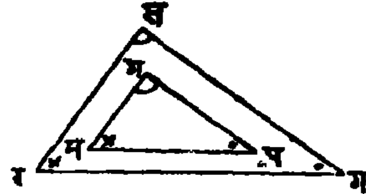
૧. એકની બે ભુજાઓ અને અંતઃકોણ બીજાની બે ભુજાઓ અને અંતઃકોણ બરાબર.

૨. એકના બે કોણ અને એક ભુજા બીજાના બે કોણ અને અનુવર્તિ ભુજા બરાબર.

૩. એકની ત્રણ ભુજાઓ બીજાની ત્રણ ભુજાઓ બરાબર.

૪. કાટખુણ ત્રિકોણોમાં એકનો કર્ણ અને એક બીજી ભુજા બીજાના કર્ણ અને એક બીજી ભુજા બરાબર.

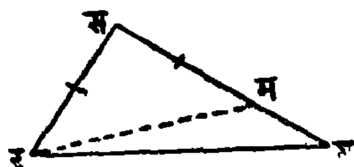




એક ત્રિકોણનાં ગમે તે ત્રણ તત્ત્વ બીજાનાં ગમે તે ત્રણ તત્ત્વ બરાબર હોય તો ત્રિકોણો એકરૂપ થતા નથી, તે ઉપરની આકૃતિઓ ઉપરથી સમજાશે.

સિદ્ધાન્ત ૧૪

કોઇ પણ ત્રિકોણમાં એક ભુજા બીજી કરતાં મોટી હોય, તો મોટી ભુજાની સામેનો કોણ નાની ભુજાની સામેના કોણ કરતાં મોટો છે.



પક્ષ : △सरगમાં सग > सर.

સાધ્ય : ∠ सरग > ∠ सगर.

રચના : सगમાંથી सम = सर કાપી रम જોડો.

સાબીતી . ∠ सरम = ∠ समर ∵ सर = सम રચના.

પણ ∠ समर > ∠ सगर ∵ ∠ समर, બાહ્યકોણ.

∴ ∠ सरम > ∠ सगर.

પણ ∠ सरग > ∠ सरम.

∴ ∠ सरग > सगर.

મનોયત્ન ૧૪

૧. △सरगમાં सर > सग, सम, ∠ स ને દુભાગી પાયાને म માં મળે છે. सरમાંથી सप = सग કાપીને मप જોડી છે. સાબીત કરો: ∠ ग > ∠ र.

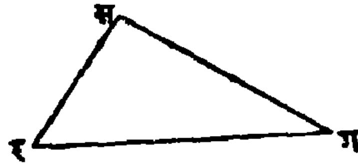
૨. △सरगમાં रग = ૭ સેમિ., गस = ૬.૭ સેમિ., सर = ૭.૫ સેમિ., હોય તો મોટામાં મોટો અને નાનામાં નાનો કોણ કયો?

૩. ત્રિકોણની મોટામાં મોટી ભુજાના છેડાના કોણો લઘુ છે.

૪. સિદ્ધાન્તની આકૃતિમાં સાબીત કરો: ∠ गरम = $\frac{1}{2}$ (∠ सरग - ∠ सगर); ∠ समर = $\frac{1}{2}$ (∠ सरग + ∠ सगर)

સિદ્ધાન્ત ૧૫

કોઇ પણ ત્રિકોણમાં એક કોણ બીજા કરતાં મોટો હોય તો મોટા કોણની સામેની ભુજા નાના કોણની સામેની ભુજા કરતાં મોટી છે.



પક્ષ : △सरगમાં ∠र > ∠ग.

સાધ્ય : सग > सर.

સાબીતી : सग અને सर ભુજાઓની લંબાઇ સંબંધી નીચે પ્રમાણે ત્રણ અનુમાન કરી શકાય.

(૧) सग = सर,
(૨) सग < सर,
(૩) सग > सर.

અનુમાન (૧) પ્રમાણે જો सग = सर હોય તો ∠र = ∠ग થાય; પણ પક્ષ પ્રમાણે આ અશકય છે.

અનુમાન (૨) પ્રમાણે જો सग सर હોય તો ∠ < ∠ग થાય; આ પણ પક્ષ પ્રમાણે અશક્ય છે.

∴ सग, सरની બરાબર કે सरથી ઓછી નથી.
∴ અનુમાન (૩) સત્ય હોવું જોઇએ.
∴ सग > सर.

ઉપસિદ્ધાન્તો :

(૧) કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ તેની મોટામાં મોટી ભુજા છે.

(૨) ગુરુકોણ ત્રિકોણમાં ગુરુકોણની સામેની ભુજા મોટામાં મોટી છે

મનોયત્ન ૧૫

૧. ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામેની ભુજાઓ ઉપર દોરેલા લંબનો સરવાળો ત્રિકોણની પરિમિતિx કરતાં ઓછો છે.

૨. **सम**, △**सरग**ના ∠**स** ને દુભાગે છે અને **रग** ને **म** માં મળે છે. સાબીત કરો: **रग** ∠**सर** + **सग**

૩. પ્રશ્ન ૨, ની આકૃતિમાં ∠**र** અને ∠**ग** લઘુકોણો હોય તો **स**માંથી પાયા ઉપર લબ દોરી બે ભુજાઓ ત્રીજી કરતાં મોટી છે એ સાબીત કરો.

૪. **सर** રેખાને **मल** લંબ એક બહારના **म** બિંદુમાંથી દોર્યો હોય અને **म** માંથી એક બીજી **मप** રેખા **सर** ને **प** માં મળે તેમ દોરી હોય, તો **मप** > **मल** થાય એ સાબીત કરો.

આ ઉપરથી સાબીત કરો: કોઇ પણ બહારના બિંદુમાંથી કોઇ પણ સુરેખા ઉપર રેખાઓ દોરવામાં આવે, તો લંબ એ નાનામાં નાની રેખા છે.

૫. કોઇ પણ આપેલી રેખાના મધ્ય બિંદુમાંથી દોરેલી સુરેખાથી આપેલી સુરેખાના છેડાઓ સરખે *અંતરે છે.

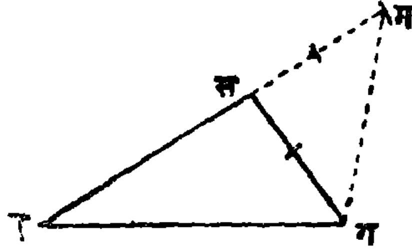
---

x કોઇ પણ આકૃતિની ભુજાઓની લંબાઇનો સરવાળો તેની **પરિમિતિ કહેવાય છે.**

* કોઇ પણ બિંદુમાંથી સુરેખા ઉપર દોરેલો લંબ ટુંકામાં ટુંકી રેખા છે માટે તે તેનું **અંતર** કહેવાય છે. સુરેખાથી બિંદુનું અંતર તે બિંદુમાંથી રેખા ઉપર દોરેલો લંબ છે.

સિદ્ધાન્ત ૧૬

કોઇ પણ ત્રિકોણની બે ભુજાઓનો સરવાળો ત્રીજી ભુજા કરતાં મોટો છે.



પક્ષ : सरग કોઇ એક △ છે.

સાધ્ય : (ક) रस + सग > रग (ખ) सर + रग > सग
(ગ) रग + सग > रस.

રચના : रस ને લંબાવી सम = सग કરો અને मग જોડો.

સાબીતી : ∠सगम = ∠समग ∵ सम = सग   રચના.
હવે ∠रगम > ∠सगम,
∴ ∠रगम > ∠समग.
∴ रम > रग.
પણ रम = रस + सम = रस + सग   રચના,
∴ रस + सग > रग.

આ જ પ્રમાણે सर + रग > सग અને रग + सग > रस સાબીત કરી શકાય.

ઉપસિદ્ધાન્ત : ત્રિકોણની બે ભુજાઓનો તફાવત ત્રીજી કરતાં નાનો છે.
(સિદ્ધાન્ત ૧૪ની રચનાની મદદ લઇ સાબીત કરો અને સિદ્ધાન્ત ૧૬ની મદદ લઇ સાબીત કરો.)

મનોયત્ન ૧૬

૧. સિદ્ધાન્તના (ખ) અને (ગ) ભાગની સ્વતંત્ર સાબીતી આપો.

૨. ચતુષ્કોણની ત્રણ ભુજાઓનો સરવાળો ચોથી ભુજાથી વધારે છે.

૩. **मपजन** ચતુષ્કોણમાં **ल** એક બિંદુ હોય તો સામેની ભુજાઓની એક જોડ **लम** + **लप** + **लध** + **लज** કરતાં ઓછી છે

૪. કોઇ પણ પાયા ઉપર બે ત્રિકોણો એક બાજુએ એક બીજાની અંદર હોય, તો અંદરના ત્રિકોણની બન્ને ભુજાઓનો સરવાળો બહારના ત્રિકોણની બે ભુજાઓના સરવાળાથી ઓછો છે.

૫. ત્રિકોણની અંદરના કોઇ એક બિંદુને શિરોબિંદુઓ સાથે જોડનારી સુરેખાઓનો સરવાળો > ત્રિકોણની અર્ધી પરિમિતિ.

૬. ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી સામેની ભુજા ઉપર દોરેલી મધ્યગા બાકીની બે ભુજાઓના અર્ધા સરવાળાથી ઓછી છે.

૭. ત્રિકોણની પરિમિતિ તેની ત્રણ મધ્યગાઓ કરતાં વધારે અને અર્ધી પરિમિતિ ત્રણ મધ્યગાઓથી ઓછી છે.

૮. ચતુષ્કોણની પરિમિતિ તેના વિકર્ણોના સરવાળાથી વધારે અને બમણા વિકર્ણોના સરવાળાથી ઓછી છે.

૯. **सरगम** ચતુષ્કોણમાં **प** કોઇ એક બિંદુ હોય, તો તેના વિકર્ણોનો સરવાળો **पस** + **पर** + **पग** +**पम** કરતાં ઓછો છે.

૧૦. ચતુષ્કોણની અંદર એક બિંદુ એવું શોધી કહાડો કે જેનાં શિરોબિંદુઓ સુધીનાં અંતરોનો સરવાળો નાનામાં નાનો હોય.

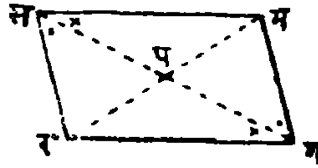
૧૧. △**सरग**ની **रग** ભુજા મોટામાં મોટી છે. **म** અને **प** બિંદુઓ **सर** અને **सग** ઉપર છે. સાબીત કરો: **रग** > **मप**.

૧૨. ત્રિકોણની અંદર તેની મોટામાં મોટી ભુજાથી વધારે મોટી રેખા દોરી શકાય નહિ.

૧૩. એક ત્રિકોણ બીજા ત્રિકોણની અંદર સમાઇ ગયો હોય, તો અંદરનાની પરિમિતિ બહારનાની પરિમિતિ કરતાં ઓછી છે.

સિદ્ધાન્ત ૧૭

સમાન્તર ચતુષ્કોણના (૧) સામેના કોણો સમાન છે, (૨) સામેની ભુજાઓ સમાન છે, (૩) દરેક વિકર્ણ સમાન્તર ચતુષ્કોણને દુભાગે છે અને (૪) વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.



પક્ષ : सरगम સમાન્તર ચતુષ્કોણ છે. सग અને रम વિકર્ણો પરસ્પર प માં છેદે છે.

સાધ્ય : (૧) ∠ सरग = ∠ गमस, ∠ रसम = ∠ मगर.
(૨) सर = गम, सम = गर.
(૩) △सरग ≡ △गमस, △रसम ≡ △मगर.
(૪) सप = पग, रप = पम.

સાબીતી : △ઓ सरग અને गमस માં,
∠ रसग = વ્યુ. ∠ मगस ∵ सर ∥ मग,
∠ रगस = વ્યુ. ∠ मसग ∵ सम ∥ रग,
सग બન્નેમાં સામાન્ય.
∴ △सरग ≡ △गमस.
∴ (૧) ∠ सरग = गमस; તેવીજ રીતે ∠ रसम = ∠ मगर.
(૨) सर = गम, सम = गर.
(૩) सग ∥ કોણને દુભાગે છે.
તેવીજ રીતે रम પણ ∥ કોણને દુભાગે છે.

વધારામાં △ઓ सपम અને गपर માં,

$\angle$ सपम = $\angle$ गपर ∵ અભિકોણો,

$\angle$ मसप = વ્યુ. $\angle$ रगप ∵ सम ∥ रग,

सम = गर ∵ ઉપર સાબીત કર્યું,

∴ △सपम ≡ △गपर.

∴ (૪) सप = गप, रप = मप.

ઉપસિદ્ધાન્તો :

(૧) સમાન્તર ચતુષ્કોણનો એક કોણ કાટખુણો હોય તો તે લંબચોરસ છે.

(૨) સમાન્તર ચતુષ્કોણની ઉપભુજાઓ સમાન હોય, તો તે સમભુજ ચતુષ્કોણ છે.

(૩) લંબચોરસની ઉપભુજાઓ સમાન હોય તો તે ચોરસ છે.

(૪) કોઇ પણ ચતુષ્કોણમાં (ક) સામેના કોણો સમાન હોય, (ખ) સામેની ભુજાઓ સમાન હોય, (ગ) તેના કર્ણો એક બીજાને દુભાગે, વા (ઘ) સામેની ભુજાઓની એક જોડ સમાન્તર અને સમાન હોય, તો ચતુષ્કોણ સમાન્તર ચતુષ્કોણ છે.

(૫) સમાન્તર રેખાઓ હંમેશાં સમાન અંતરે રહે છે.

(૬) કોઇ પણ આપેલી સુરેખા ઉપર જો બે સમાન લંબ એક જ બાજુએ દોર્યા હોય, તો તેમના છેડાને સાંધનારી સુરેખા આપેલી રેખાને સમાન્તર છે.

મનોયત્ન ૧૭

૧. કોઇ પણ || કોણમાં સામેની બે ભુજાઓનાં મધ્ય બિંદુઓને જોડનારી સુરેખા બીજી ભુજાઓને સમાન્તર છે.

૨. कचटत || કોણમાં म અને ल અનુક્રમે कच અને टत ના મધ્ય બિંદુઓ છે. તો चमतल || કોણ છે એ સાબીત કરો.

૩. || કોણના વિકર્ણો જો તે લંબચોરસ ન હોય તો સરખા હોતા નથી.

૪. ચતુષ્કોણના વિકર્ણો સરખા હોય અને પરસ્પર દુભાગે તો ચતુષ્કોણ લંબચોરસ છે.

૫. સમભુજ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર કાટખુણે દુભાગે છે.

૬. || કોણના કોણોને દુભાગનારી રેખાઓ લંબચોરસ બનાવે છે.

૭. વિકર્ણો સરખા હોઇ પરસ્પર કાટખુણે દુભાગે તો ચતુષ્કોણ ચોરસ છે.

૮. || કોણના વિકર્ણોના છેદન બિંદુમાંથી સામેની ભુજાઓ સુધી દોરેલી સુરેખા તે બિંદુમા દુભાગાય છે અને તે || કોણને પણ દુભાગે છે.

૯. || કોણમાં કર્ણથી તેની સામેનાં શિરોબિંદુઓ સરખે અતરે છે.

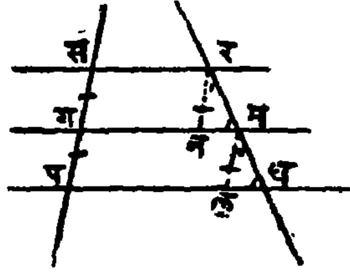
૧૦. વર્તુલના બે વ્યાસના છેડાઓને જોડનારી રેખાઓ લ. ચો. બનાવે છે.

૧૧. सरगम અને सरपध || કોણો सर પાયા ઉપર આવેલા છે, તો मगपध પણ || કોણ છે એ સાબીત કરો.

૧૨. सरगम || કોણના गस વિકર્ણને सप = सग થાય ત્યાં સુધી લંબાવી सरघप || કોણ પૂરો કર્યો હોય, તો सम અને सध એકજ સુરેખામાં આવે.

સિદ્ધાન્ત ૧૮

ત્રણ અથવા વધારે સમાન્તર સુરેખાઓ કોઇ એક છેદકના અંતર્ભાગો સરખા બનાવતી હોય, તો તેઓ બીજા કોઇ પણ છેદકના અંતર્ભાગો પણ સરખા બનાવે છે.



પક્ષ : सर, गम, અને पध સમાન્તર રેખાઓ सगप અને रमध ને છેદે છે અને सग = गप બનાવે છે.

સાધ્ય : रम = मध.

રચના : रમાંથી रन અને मમાંથી मल, सगपને ‖ દોરો.

સાબીતી : सग = रन. ∵ सगनर ‖ કોણ. પક્ષ અને રચના.

गप = मल. ∵ गपलम ‖ કોણ. પક્ષ અને રચના.

પણ सग = गप પક્ષ.

∴ रन = मल.

હવે △ઓ रमन અને मधलમાં

रन = मल સાબીત કર્યું.

∠ नरम = સંગત ∠ लमध ∵ रन ‖ सप ‖ मल રચના

∠ रमन = સંગત ∠ मधल ∵ गम ‖ पध. પક્ષ.

∴ △ रमन ≡ △ मधल.

∴ रम = मध.

વ્યત્યાસ : એથી વધારે સુરેખાઓ કોઇ પણ છેદકના અંતર્ભાગો સરખા બનાવતી હોય તો તે સુરેખાઓ સમાન્તર છે.

ઉપસિદ્ધાન્તો :

(૧) ત્રિકોણની કોઇ ભુજાના મધ્ય બિંદુમાંથી પાયાને સમાન્તર રેખા દોરવામાં આવે, તો તે બીજી ભુજાને દુભાગે છે.

(૨) ત્રિકોણની બે ભુજાઓનાં મધ્ય બિંદુઓને જોડનારી રેખા ત્રીજી ભુજાને સમાન્તર છે અને તેથી અર્ધી છે.

મનોયત્ન ૧૮

૧. કોઇ પણ ત્રિકોણની ભુજાઓનાં મધ્ય બિંદુઓને જોડવાથી ત્રિકોણના જે ચાર ભાગ થાય છે તે સઘળા એકરૂપ છે.

૨. કોઇ પણ ચતુષ્કોણની ભુજાઓનાં મધ્ય બિંદુઓને અનુક્રમે જોડવાથી થતો ચતુષ્કોણ || કોણ છે.

૩. કોઇ પણ ચતુષ્કોણની ભુજાઓનાં સામેનાં મધ્ય બિંદુઓને જોડનારી રેખાઓ પરસ્પર દુભાગે છે.

૪. ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયા ઉપર દોરેલી રેખા બીજી ભુજાઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી રેખાથી દુભાગાય છે.

૫. **कचटत** || કોણ છે. **घ** અને **न** અનુક્રમે **कच** અને **टत**નાં મધ્યબિંદુઓ છે, તો **चन** અને **घत**, **कट**ને ત્રિભાગે છે.

૬. * સમલંબચતુષ્કોણની સમાન્તર ન હોય તેવી ભુજાઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડનારી રેખા સમાન્તર ભુજાઓના સરવાળાથી અર્ધી છે.

૭. ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એક જ બિંદુમાં મળે છે અને દરેક મધ્યગા તે બિંદુમાં ત્રીજે ભાગે છેદાય છે.

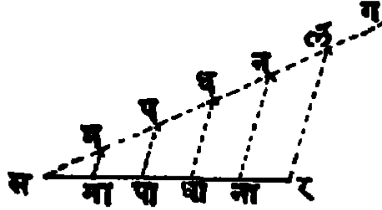
૮. **सरगम** || કોણની **सर** અને **सम** ભુજાઓનાં **प** અને **ल** મધ્યબિંદુઓ છે. સાબીત કરો: **गप** અને **गल**, **रम** ને ત્રિભાગે છે.

---

* જે ચતુષ્કોણની સામસામેની ભુજાઓની એક જોડ સમાન્તર હોય તેને **સમલંબચતુષ્કોણ** કહે છે.

કૃત્ય ૧૧

આપેલી સુરેખા सरના ગમે તેટલા સરખા ભાગ કરવા.



અનુકૂળતા ખાતર ધારો કે सरના પાંચ સરખા ભાગ કરવા છે.

રચના : सर સાથે ગમે તે કોઇ કોણ બનાવી सમાંથી सग એક અનન્ત લંબાઇની સુરેખા દોરો. કોઇ એક ત્રિજ્યા લઇ તેના सम, मप, पध, धन, नल પાંચ સરખા કરો. लर જોડો. म, प, ध, नમાંથી लरને સમાન્તર રેખાઓ દોરી सरને मा, पा, धा, नाમાં મળવા દો. એટલે मा, पा, धा, ना, બિંદુઓ सरના પાંચ સરખા ભાગ કરશે.

સાબીતી : ममा, पपा, धधा, नना, ∥ लर
અને सम = मप = पध = धन = नल } રચના;

∴ समा = मापा = पाधा = धाना = नार.

મનોયત્ન

૧. આપેલી ૩.૫" લંબાઇની રેખાનો $\frac{૪}{૫}$ ભાગ જુદો પાડો અને તેની લંબાઇ માપો.

૨. ૩.૮" લંબાઇની રેખાના ૯ સરખા ભાગ કરો. આના ૪, ૫, ૬ ભાગ જેટલી લંબાઇની ભુજાઓ લઇ એક ત્રિકોણ દોરો.

૩. सर = ૨.૬", रग ૩.૭", गस = ૪.૫" લઇ △सरग બનાવો. આ ભુજાઓની $\frac{૩}{૫}$ લંબાઇની ભુજાઓ લઇ सारागा બીજો ત્રિકોણ બનાવો. બન્નેના કોણો માપો.

નિદાન (ગતિરેખા)

પ્રાયોગિક મનોયત્ન

૧. क નામનું એક બિંદુ સ્થિર છે. क થી ૨" દૂર આશરે ૧૦ બિંદુઓ લ્યો. આ બધાં બિંદુઓમાં થઈને પસાર થતી એક રેખા દોરો.

૨. આ રેખા ઉપરનાં બધાં બિંદુઓ क થી કેટલે અન્તરે છે? क થી ૨" થી વધારે અથવા ઓછા અન્તરે આવેલાં બિંદુઓ ઉપર જણાવેલી રેખા ઉપર આવશે કે નહિ તે કારણ સાથે સ્પષ્ટ કરો.

૩. क નામનું એક સ્થિર બિંદુ છે. क થી ૪" દૂર એક म નામનું અસ્થિર બિંદુ છે. તે क થી સરખા અન્તરે રહીને જ ફરતું હોય તો કેવી આકૃતિ બનાવે? म બિંદુનો ઉપરની શરત પ્રમાણે ફરવાનો રસ્તો કયો? म બિંદુની ગતિરેખા ઉપરનાં સઘળાં બિંદુઓ क થી કેટલે અન્તરે છે?

૪. सर નામની એક સુરેખાથી ૨" ને અન્તરે લગભગ ૧૦ બિંદુઓ લ્યો. તે બધાને જોડો. આ જોડનારી રેખા सर સાથે કેવો સંબંધ ધરાવે છે? તે ઉપરનાં બધાં બિંદુઓ કયી શરત પૂરી પાડે છે? આપેલી શરત પ્રમાણે રેખાની બીજી બાજુએ બિંદુઓ લેવાથી બિંદુની ગતિરેખા તે તરફ પણ દોરી શકાય કે નહિ? આ બે ગતિરેખાઓ ઉપરનાં બિંદુઓ સિવાય બીજું કોઈ બિંદુ અથવા બિંદુઓ આપેલી શરત પૂરી પાડે?

૫. सर રેખાથી ૩" ને અન્તરે રહેતા એક प નામના અસ્થિર બિંદુની ગતિરેખા દોરો.

૬. स અને र ને ૨" ને અન્તરે લ્યો. सर જોડો. क આગળ તેને દુભાગો. स અને र થી सर ની બન્ને બાજુએ ૨" દૂર એક એક બિંદુ લ્યો. આજ પ્રમાણે स અને र થી ૩", ૩·૫" અને ૪" ને અન્તરે બન્ને બાજુએ બિંદુઓ લ્યો. તેમને જોડો. બિંદુની ગતિરેખા, સુરેખા કે વક્રરેખા થશે તે કહો.

૭. પ્રશ્ન ૬ માં ગતિરેખા ઉપર બીજાં કેટલાંક બિંદુઓ લઇએ તો તે स અને र થી સરખે અન્તરે હોય ?

૮. પ્રશ્ન ૬ માં सर ને ગતિરેખા કેટલા અંશને કોણે કાપે છે તે કહો. આને માટે સાબીતી આપી શકશો ? આ ઉપરથી શું અનુમાન કરી શકો છો ?

૯. स અને र બે સ્થિર બિંદુઓ ૨" ને અન્તરે લ્યો. स અને र થી સરખે અન્તરે લગભગ ૧૦ બિંદુઓ શોધી કહાડો અને તે બધાને જોડો. તેમને જોડનારી રેખા સુરેખા કે વક્રરેખા થશે ? બિંદુની પ્રતિરેખા ઉપરનાં સઘળાં બિંદુઓ स અને र થી કેટલે અન્તરે છે ? ગતિરેખા ઉપર ન હોય તેવું બહારનું કોઇ બિંદુ આપેલી શરત પૂરી કરશે ?

૧૦. ૩" અંતરે આવેલાં બે બિંદુઓથી સરખે અંતરે રહેતા प નામના અસ્થિર બિંદુની ગતિરેખા દોરો.

૧૧. વર્તુલની ત્રિજ્યાના મધ્ય બિંદુની ગતિરેખા દોરો. ગતિરેખા ઉપરનાં બિંદુઓ વર્તુલના મધ્યબિંદુથી કેટલે અન્તરે છે ?

૧૨. ૨" ની ત્રિજ્યા લઇને એક વર્તુલ દોરો. તેના પરિઘ ઉપર स બિંદુ લ્યો. स માંથી ૮ જીવાઓ દોરો. તેમનાં મધ્યબિંદુઓની ગતિરેખા બતાવો. જો તે વર્તુલ હોય તો તેની ત્રિજ્યા કેટલી લાંબી છે ?

૧૩. ૨" ત્રિજ્યા લઇને એક વર્તુલ દોરો. તેમાં ૧૦ સમાન્તર જીવાઓ દોરો. તેમના મધ્ય બિંદુની ગતિરેખા દોરી તે જીવાઓ સાથે કેટલો કોણ કરે છે તે કહો. આ ઉપરથી તમે શું અનુમાન કહાડો છો ?

૧૪. ૨" ત્રિજ્યા લઇ વર્તુલ દોરો. તેના કેન્દ્રથી ૪" દૂર प બિંદુ લ્યો. प માંથી વર્તુલના પરિઘમાં મળે તેવી રીતે ૮ રેખાઓ દોરો. આ રેખાઓનાં મધ્યબિંદુઓની ગતિરેખા દોરો.

૧૫. सर = ૪" દોરો. स માંથી ૮ રેખાઓ દોરો. र માંથી આ રેખાઓને લંબ દોરો. આ રીતે થતા ૮ કાટખુણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ કયી રેખા ઉપર આવે ? ગતિરેખાની ત્રિજ્યા કેટલી ?

૧૬. બે સમાન્તર સુરેખાઓથી સરખે અન્તરે રહેતા બિંદુની ગતિરેખા કયી ?

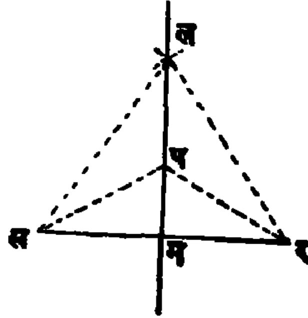
વ્યાખ્યા: કોઇ પણ બિંદુ આપેલી શરતો પ્રમાણે ફરી પોતાને માટે જે માર્ગ દોરો તેને તે બિંદુની **ગતિરેખા અથવા નિધાન** કહે છે.

અમુક શરતો પ્રમાણે ફરનાર બિંદુનો માર્ગ એ બિંદુનું નિધાન છે એ સાબીત કરવાને નીચેની બે બાબતો સાબીત કરી એવડી સાબીતી આપવાની જરૂર છે.

(૧) આપેલી શરત પૂરી કરતું ગમે તે બિંદુ નિધાન ઉપર છે.
(૨) નિધાન ઉપરનું ગમે તે બિંદુ આપેલી શરત પૂરી પાડે છે.

સિદ્ધાન્ત ૧૯

બે સ્થિર બિંદુઓથી સરખે અંતરે આવેલા બિંદુનું નિધાન તે બે બિંદુઓને જોડનારી સુરેખાને દુભાગનાર લંબ છે.



૧. પક્ષ : ल બિંદુ स અને र સ્થિર બિંદુઓથી સરખે અંતરે છે. सल = लर

સાધ્ય : ल બિંદુ सर ને દુભાગનાર લંબ ઉપર છે.

રચના : सर જોડો અને તેને म આગળ દુભાગો. लम જોડો.

સાબીતી : △समल અને △रमलમાં,

सल = लर — પક્ષ.

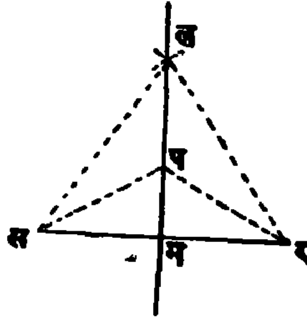
सम = रम — રચના.

लम સામાન્ય છે.

∴ △समल ≡ △रमल.

∴ ∠लमस = ∠लमर = ૯૦°.

∴ ल, सर ને દુભાગનાર લંબ ઉપર છે, એટલે કે તે નિધાન ઉપર છે.



૨. પક્ષ : सर ને म આગળ દુભાગનાર લંબ ઉપર ગમે તે એક प બિંદુ લ્યો.

સાધ્ય : प બિંદુ આપેલી શરત પૂરી કરે છે એટલે કે पस = पर.

રચના : पस અને पर જોડો.

સાબીતી : △ઓ सपम અને रपमમાં

∠ सपम = ∠ रमप — પક્ષ.

सम = रम — પક્ષ.

पम સામાન્ય,

∴ △सपम ≡ △ रपम.

∴ पस = पर

∴ નિધાન ઉપરનું ગમે તે બિંદુ આપેલી શરત પૂરી કરે છે.

∴ लम (બન્ને બાજુ ગમે તેટલી લંબાવેલી) કે જે सर ને દુભાગનાર લંબ છે તે लનું નિધાન છે.

મનેાયત્ન ૧૯

૧. स, र, ग, બિંદુઓ એક વર્તુલ ઉપર આવેલાં છે. આ ત્રણે બિંદુઓથી સરખે અંતરે આવેલું વર્તુલનું કેન્દ્ર શોધી કહાડો.

૨. △सरगનાં ત્રણ શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે એક બિંદુ શોધી કહાડો.

૩. △सरग નાં શિરોબિંદુઓ એક વર્તુલ ઉપર આવેલાં છે. र અને ग થી સરખે અંતરે વર્તુલ ઉપર વધારેમાં વધારે કેટલાં બિંદુઓ આવી શકે?

૪. એવું એક બિંદુ શોધી કહાડો કે જે स થી ૪" અને रથી ૪·૫" દૂર હોય.

૫. स અને रથી સરખે અન્તરે આવેલું એક બિંદુ पक નામની ઘણી લાંબી સુરેખા ઉપર છે, તો તે બિંદુ શોધી કહાડો.

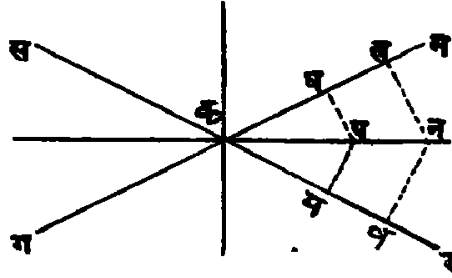
૬. सर અને गम ત્રણ ઇંચ દૂર બે સમાન્તર સુરેખાઓ છે. प નામનું સ્થિર બિંદુ सरથી ૨" અને गमથી ૧" દૂર છે; તો તેનું નિશ્વાન દોરવાને ઉપરના શબ્દોમાં શું ફેરફાર કરવો જોઇએ?

૭. सर અને सग રેખાઓ ૪૮° કોણ બનાવે છે. તેમની વચ્ચે प બિંદુ એવું લ્યો કે જે બન્ને રેખાઓથી સરખે અંતરે હોય. पस જોડો. સાબીત કરો: ∠पसर = ∠पसग.

૮. ∠रसग = ૮૦° બનાવો. તેને सपથી દુભાગો. सप ઉપર ગમે તે એક ल બિંદુ લઇ તે सर અને सगથી સરખે અંતરે છે એ સાબીત કરો.

સિદ્ધાન્ત ૨૦

પરસ્પર છેદતી બે સુરેખાઓથી સરખે અંતરે રહેતા બિંદુનું નિધાન તે રેખાઓની વચ્ચેના કોણોને દુભાગનાર રેખાઓની જોડ છે.



(૧) પક્ષ : सकर અને गकम પરસ્પર क આગળ છેદે છે. सकर અને गकमથી સરખે અંતરે એક न બિંદુ લ્યો. नल = नव.

સાધ્ય : न બિંદુ કોણોને દુભાગનાર રેખા ઉપર છે એટલે કે कन, ∠ मकर ને દુભાગે છે.

રચના : नल અને नव અનુક્રમે गकम અને सकर ઉપર લંબ દોરો. कन જોડો.

સાબીતી : △ઓ नलक અને नवकમાં

કા. ∠ नलक = કા. ∠ नवक   રચના.

नल = नव   પક્ષ.

कन સામાન્ય.

∴ △नलक ≡ △नवक.

∴ ∠ लकन = ∠ वकन.

∴ कन, मकर ને દુભાગે છે.

∴ न, કોણને દુભાગનાર રેખા ઉપર છે એટલે કે આપેલી શરત પૂરી કરતું બિંદુ न નિધાન ઉપર છે.

(૨) પક્ષ : सकर અને गकमथी બનતા કોણોને દુભાગનાર રેખા ઉપર ગમે તે એક प બિંદુ લ્યો. ∠ पकध = ∠ पकय.

સાધ્ય : प બિંદુ બન્ને રેખાઓથી સરખે અંતરે છે. पध = पय.

રચના : पध અને पय અનુક્રમે गकम અને सकर ઉપર લંબ દોરો.

સાબીતી : △ઓ पधक અને पयकમાં

∠ पकध = ∠ पकय — પક્ષ.

કા. ∠ पधक = કા. ∠ पयक — રચના.

पक સામાન્ય.

∴ △ पधक ≡ △ पयक.

∴ पध = पय.

∴ प બન્ને રેખાઓથી સરખે અંતરે છે.

∴ નિધાન ઉપરનું ગમે તે બિંદુ આપેલી શરત પૂરી કરે છે.

આજ પ્રમાણે ∠ सकम ને દુભાગનાર રેખા પણ તેનાથી સરખે અંતરે રહેતા બિંદુનું નિધાન છે એમ સાબીત થાય.

∴ માગેલું નિધાન બે રેખાઓથી બનતા કોણોને દુભાગનાર રેખાઓની જોડ છે.

મનોયત્ન ૨૦

૧. △सरगની ત્રણે ભુજાઓથી સરખે અંતરે આવેલું એક બિંદુ શોધી કહાડો.

૨. △सरगની ત્રણે ભુજાઓ લંબાવી બહિર્વૃત્ત વર્તુલો દોરો.

૩. આપેલી સુરેખા सर ઉપર ग અને म બિંદુઓથી સરખે અંતરે આવેલું બિંદુ શોધી કહાડો.

૪. ત્રિકોણનો પાયો અને ઉંચાઇ આપેલી હોય તે ઉપરથી તેના શિરોબિંદુનું નિધાન શોધી કહાડો.

૫. ત્રિકોણની ત્રીજી ભુજામાં બે ભુજાઓથી સરખે અંતરે આવેલું હોય તેવુ એક બિંદુ શોધી કહાડો.

૬. આપેલા પાયા ઉપર આવેલા સમદ્વિભુજ ત્રિકોણના શિરો-બિંદુનું નિધાન શોધી કહાડો.

૭. ચતુષ્કોણની બે પાસપાસેની ભુજાઓથી સરખે અન્તરે અને બીજી બે ભુજાઓથી સરખે અન્તરે આવેલું બિંદુ શોધી કહાડો.

૮. બે સમાન્તર સુરેખાઓથી સરખે અંતરે અને બે પરસ્પર છેદતી સુરેખાઓથી સરખે અંતરે આવેલું બિંદુ શોધી કહાડો.

૯. એક જ પાયો અને પાયા ઉપરની મધ્યગાની લંબાઇ આપી હોય તે ઉપરથી ત્રિકોણોનાં શિરોબિંદુઓનું નિધાન શોધી કહાડો.